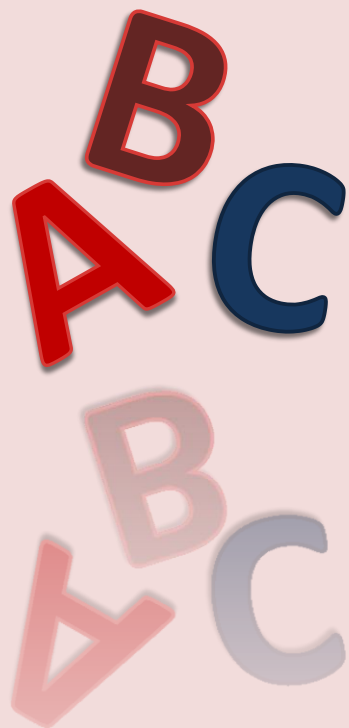
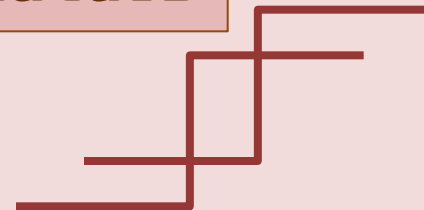


11 класс



Введение в теорию графов

начать

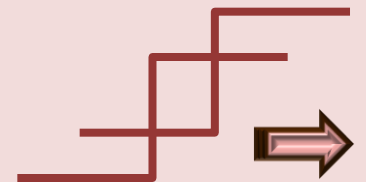


Введение в теорию графов

Граф отображает элементный состав системы и структуру связей.

В
А С

В С
А С



Понятие графа

Граф – это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек. Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

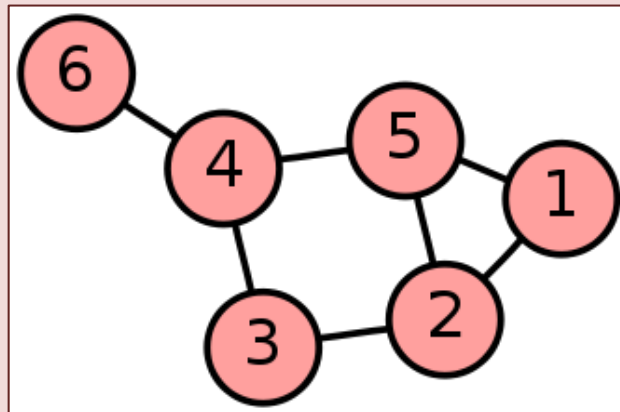
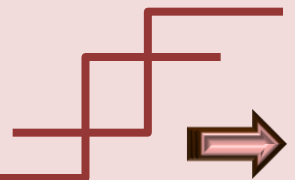


Рис. 1. Граф с шестью вершинами и семью ребрами



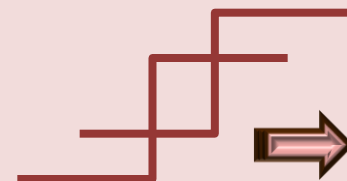
Элементы графа

Петля это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

Пустым (нулевым) называется граф без ребер.

Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

В
А С
В
А С



Нулевой граф

Граф, состоящий из «изолированных»
вершин, называется нулевым графом

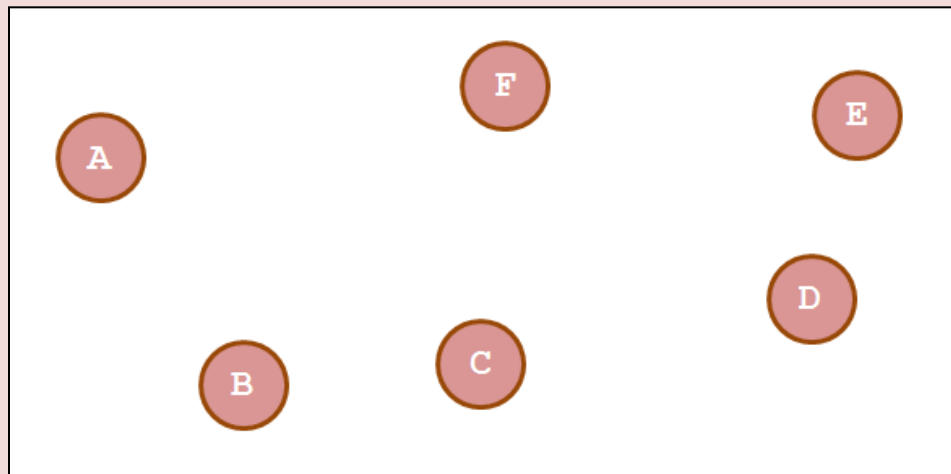
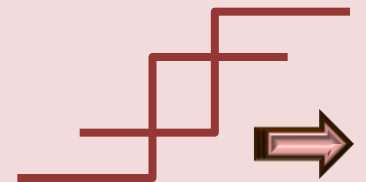
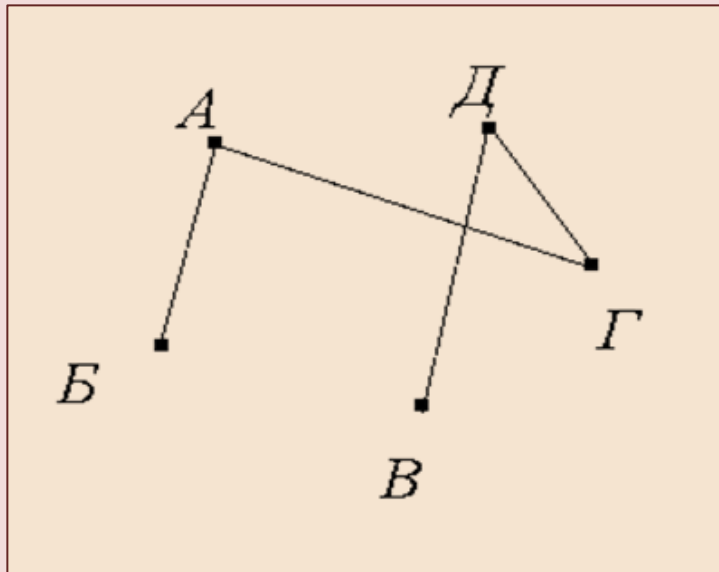


Рис. 2. Нулевой граф

В
А С
В
А С



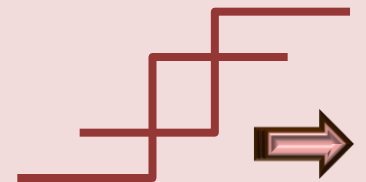
Неполный граф



Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются неполными графами.

Рис. 3. Неполный граф

В
А С
В
Г С



Степень графа

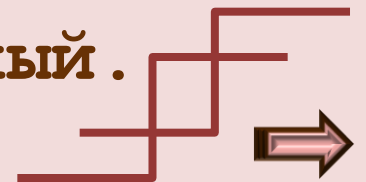
Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной.

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется однородным.

Таким образом, любой полный граф – однородный.

A B C

A B C



Заметим, что если полный граф имеет n вершин, то количество ребер равно

$$n(n-1)/2$$

Задание 1. Существует ли полный граф с семью ребрами?

ОТВЕТ

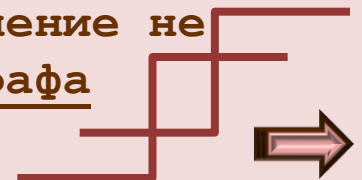
Решение: Зная количество ребер, узнаем количество вершин.

$$n(n-1)/2=7.$$

$$n(n-1)=14.$$

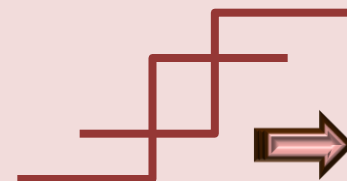
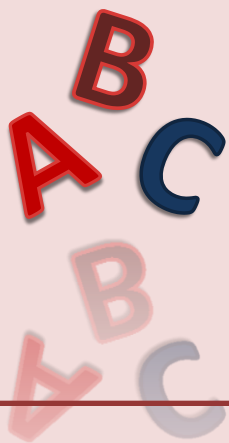
Заметим, что n и $(n-1)$ – это два последовательных натуральных числа. Число 14 нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел, значит, данное уравнение не имеет решений. Следовательно, такого графа не существует.

В
А С
В С
А С



Задание 2.

1. Построить полный граф, если известно что он содержит в себе 7 вершин.
2. Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 10 команд.



Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

Ориентированный граф

Граф называется ориентированным (или оргграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в оргграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Если ребра ориентированы, что обычно показывают стрелками, то они называются дугами.

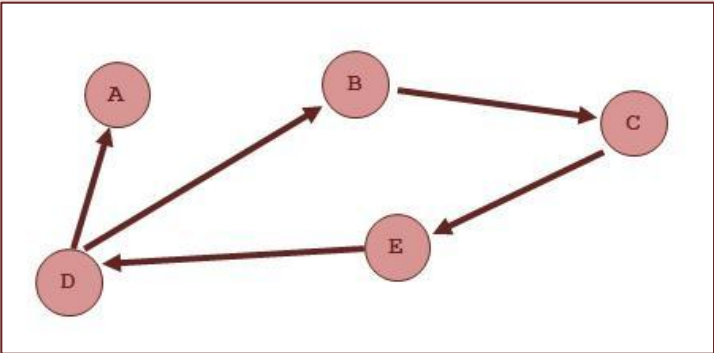
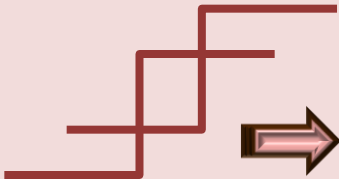


Рис. 4. Ориентированный граф

A B C

A B C



Ориентированный и неориентированный графы

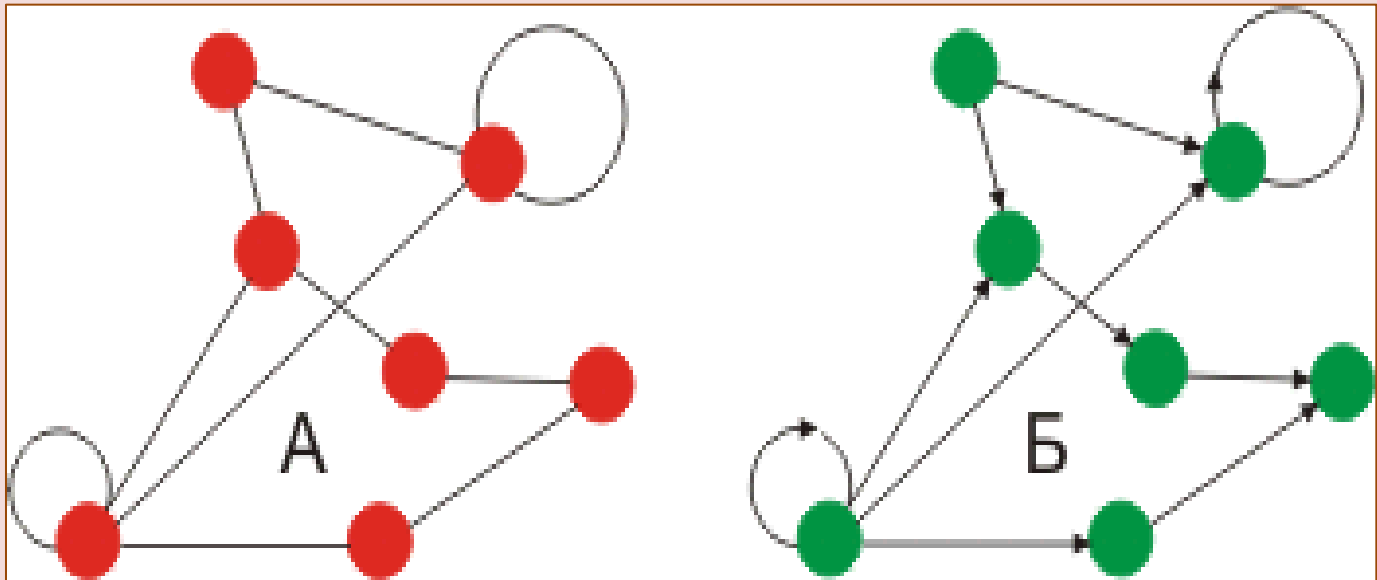
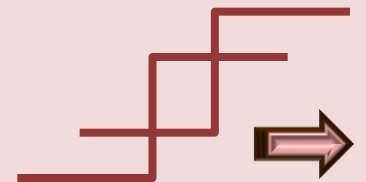


Рис. 5. Примеры неориентированного
и ориентированного графов (А и Б)

В
А С
В
А С

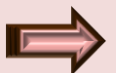
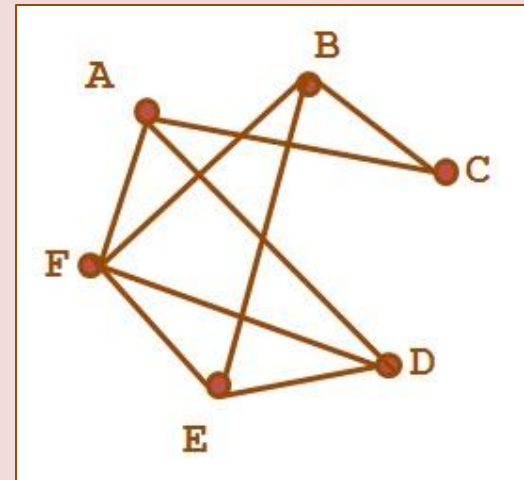


Задание 3. Построить граф по заданному условию:

В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили буквами А, В, С, D, Е и F. Через несколько недель некоторые из команд уже сыграли друг с другом:

А	с	С, D, F;
В	с	С, Е, F;
С	с	А, В;
D	с	А, Е, F;
Е	с	В, D, F;
F	с	А, В, D.

ОТВЕТ

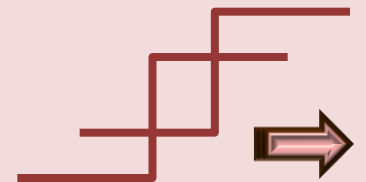


Запомнить !

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление. Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие — нет.

А В С

А В С



Изображение графа

Один и тот же граф может выглядеть на рисунках по-разному. На рисунке 6 (а, б, в) изображен один и тот же граф.

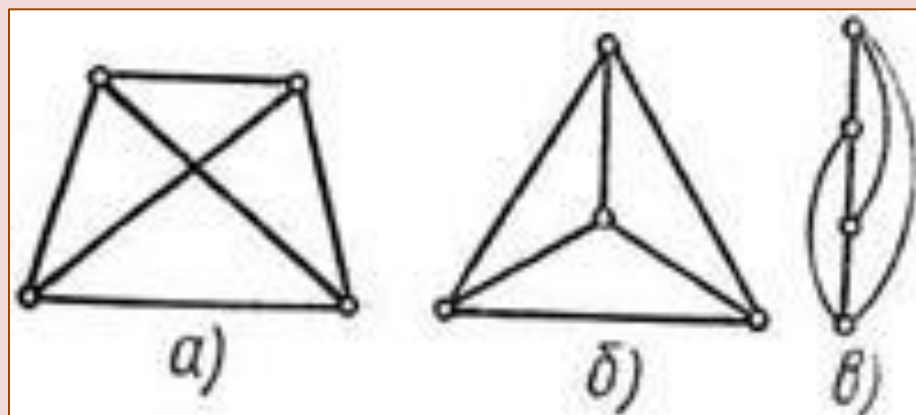
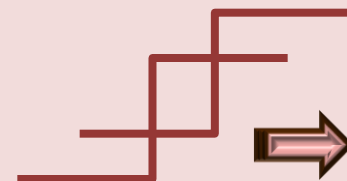


Рис. 6. Примеры изображения графа



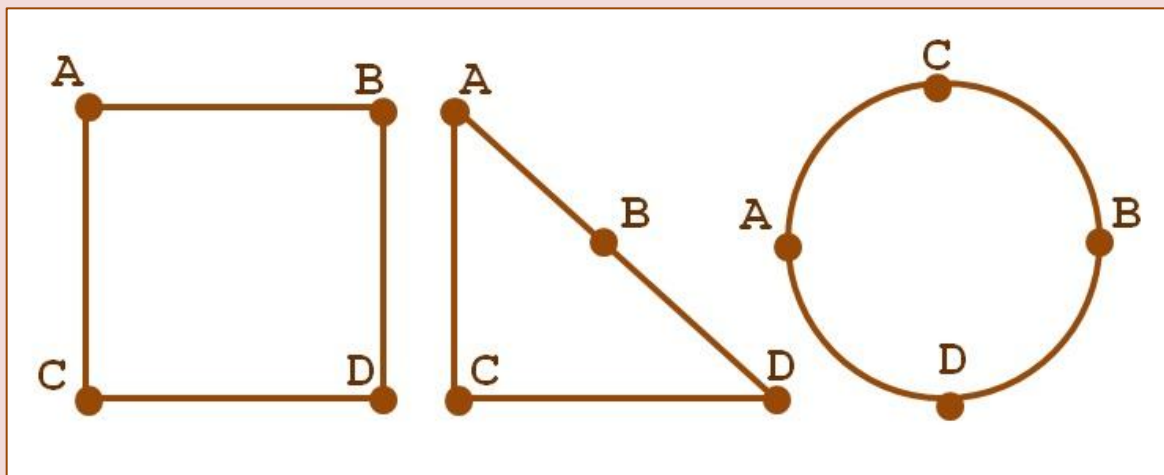
Задание 4.

Определить изображают ли фигуры на рисунке один и тот же граф или нет.

1)

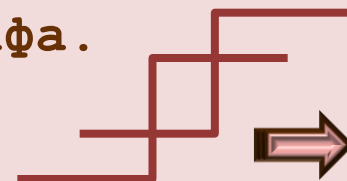
2)

3)



ОТВЕТ

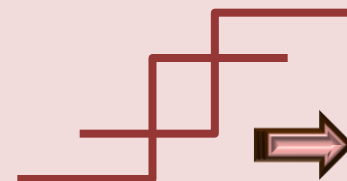
Рисунок 1 и рисунок 2 являются изображениями одного графа. Рисунок 3 изображением другого графа



Путь в графе

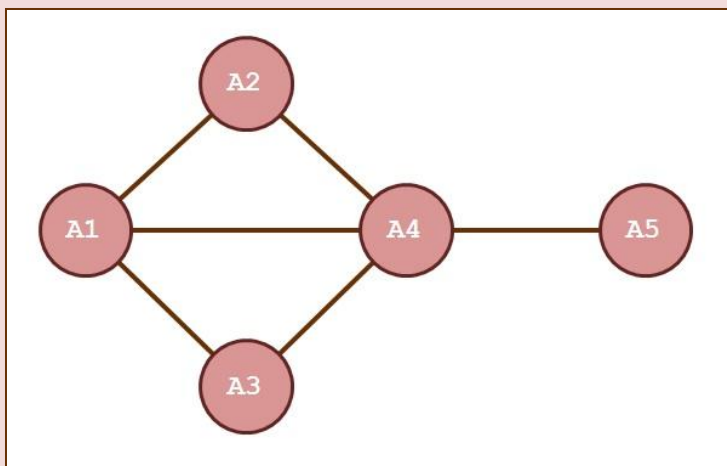
Путём в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

В
А С
В С
А С



Задание 5.

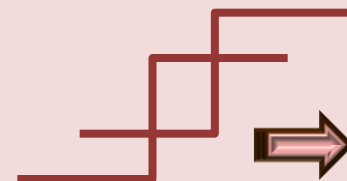
1. (A1 A4) ; (A4 A5) .
2. (A1 A2) ; (A2 A4) ; (A4 A5) .
3. (A1 A4) ; (A4 A2) ; (A2 A1) ; (A1 A4) ; (A4, A5) .
4. (A1 A4) ; (A4 A2) ; (A2 A1) ; (A1 A3) ; (A3 A4) ; (A4, A5) .



Определить какая из перечисленных последовательностей путём не является.

ОТВЕТ

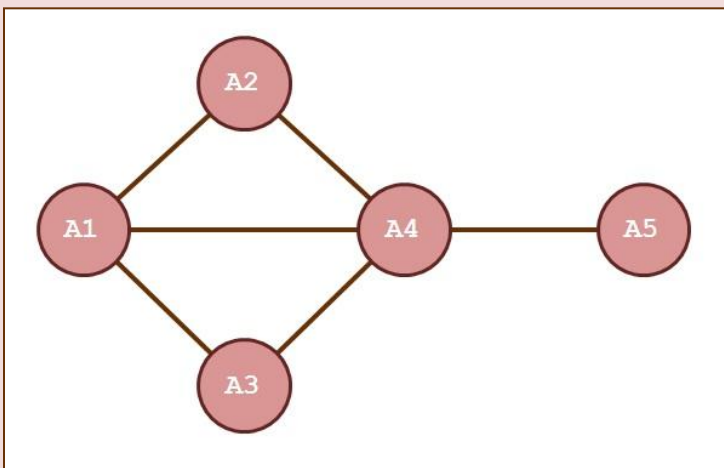
Третья последовательность (A1 A4) ; (A4 A2) ; (A2 A1) ; (A1 A4) ; (A4, A5) .



Путь называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 6.

1. $(A1 \ A4) ; (A4 \ A5) .$
2. $(A1 \ A2) ; (A2 \ A4) ; (A4 \ A5) .$
3. $(A1 \ A4) ; (A4 \ A2) ; (A2 \ A1) ; (A1 \ A4) ; (A4, \ A5) .$
4. $(A1 \ A4) ; (A4 \ A2) ; (A2 \ A1) ; (A1 \ A3) ; (A3 \ A4) ; (A4, \ A5) .$



Первая, вторая и четвертая последовательности являются путями, а третья нет, т.к. ребро $(A1, A4)$ повторяется. Первая и вторая последовательность являются простыми путями, а четвертая нет, т.к. вершины $A1$ и $A4$ повторяются.

ОТВЕТ

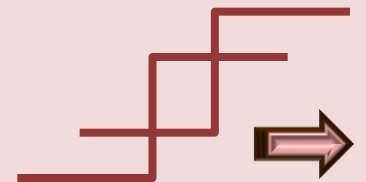


Понятие цикла в графе

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

В
А С
В С
А С

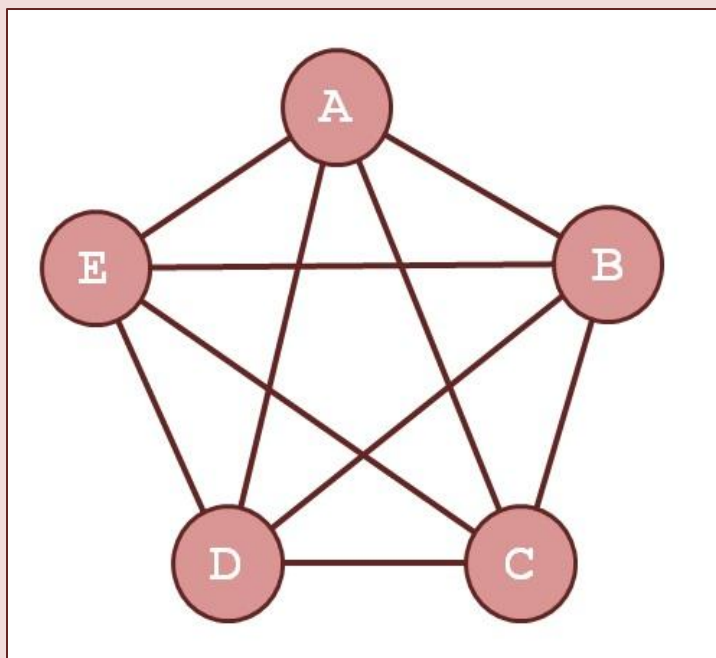


Задание 7.

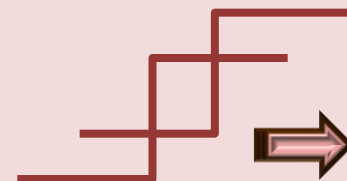
Назовите в графе циклы, содержащие

- а) 4 ребра;
- б) 6 ребер;
- с) 5 ребер;
- д) 10 ребер.

Какие из этих циклов являются простыми?



ОТВЕТ



ОТВЕТ

Решение :

- a)** (AB, BC, CE, EA), (CD, DA, AB, BC), (EB, BC, CD, DE) и т.д. – простые циклы.
- b)** (DB, BE, EA, AB, BC, CD), (EC, CA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.
- c)** (AB, BC, CD, DE, EA), (AC, CE, EB, BD, DA) и т.д. – простые циклы.
- d)** (AC, CE, EB, BD, DA, AB, BC, CD, DE, EA), (EB, BD, DA, AC, CE, EA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.

А В С
А В С

