Методические основы работы школьных математических кружков как способа выявления одаренных учащихся и развития их способностей

Яков Самуилович Гриншпон,
зам. директора НОМЦ ТГУ по работе со школьниками,
доцент каф. общей математики ММФ ТГУ

В школе:

- зарождается интерес к разным областям человеческой деятельности;
- формируется критическое мышление;
- закладывается фундамент математического знания.

Учитель формирует **среду**, в рамках которой происходит развитие и воспитание учащихся.

Задача педагогического математического сообщества:

предоставить шанс попробовать себя в роли математика-исследователя как можно большему количеству школьников!

Привлечение школьников к математическим образовательным проектам:

- математические кружки;
- факультативные внеурочные занятия;
- открытые лекции;
- мастер-классы;
- олимпиады;
- конкурсы;
- конференции;
- образовательные видеоролики.

Только грамотный учитель, проводящий уроки с горящими глазами, может зажечь искорку интереса у своих учеников!

Основа развития математических способностей учащегося - системная и постоянная работа на школьных уроках.

Легенда о Гауссе.

«Сложить все натуральные числа от 1 до 100».

$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots = 101 \cdot 50 = 5050.$

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) +$ |55

$+(11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20) +$ |55 + 100

$+\ldots+$

$+(91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100)+$ |55 + 900

$= 10 \cdot 55 + 100 \cdot 45 = 550 + 4500 = 5050.$

Работа на уроках:

- позволяет выявить одарённого учашегося;
- не позволяет существенно развить способности одарённого учащегося *(например, чтобы он смог достойно выступать на олимпиадах и конкурсах высокого уровня)*.

Олимпиадная математика имеет особенности как в постановке задач, так и в методах их решения.

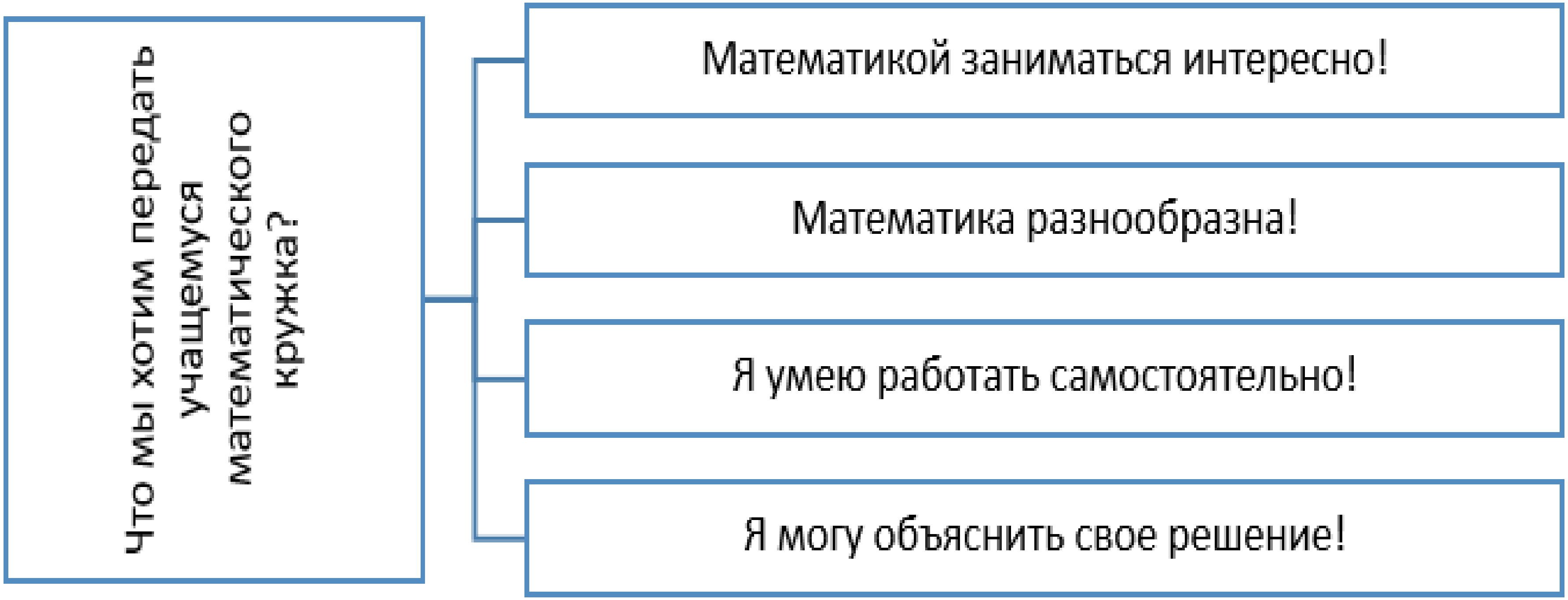
Для интересующихся школьников необходимо организовать дополнительные занятия («математические кружки»).

Кружок при школе:

- развитие и углубление школьных знаний и умений;
- решение занимательных (олимпиадных) задач.

Кружок вне школы:

- решение занимательных (олимпиадных) задач.



Наиболее эффективным при проведении кружковых занятий является задачный (проблемно-ориентированный) подход.

Работа с «листками».

ЛИСТОК

- Листок – это упорядоченный набор задач, составленный так, чтобы помочь ученику с наибольшей возможной степенью самостоятельности овладеть изучаемыми фактами, идеями, приёмами.
- Задачи подобраны и расположены таким образом, чтобы натолкнуть ученика на нужные идеи.
- При разработке листка заранее продумываются подсказки, если какие-то задачи вызовут затруднения.
- Иногда в текст листка включаются определения математических терминов, описания и история изучаемых методов, формулировки теорем.

ЗАНЯТИЯ С ЛИСТКОМ

- Ученики сразу же в начале занятия (или после некоторой предварительной подготовки) получают листки, решают задачи и рассказывают решения учителю.
- При необходимости даются индивидуальные или групповые подсказки.
- В некоторый момент прием решений прекращается, и задача разбирается.
- В итоге все задачи должны быть разобраны.
- Учитель ведёт ведомость («плюсник»), в которой отмечаются задания, выполненные каждым учеником.
- В конце некоторого периода (четверть в школе, смена в лагере, месяц в кружке и т.д.) ученики, решившие наибольшее количество задач, награждаются (грамотами или призами).

ФОРМЫ РАБОТЫ С ЛИСТКАМИ

- На начальном этапе эффективен разбор задач вместе с учащимися путём общего «мозгового штурма».
- Далее переходят к формату, когда ученик, решивший задачу, рассказывает своё решение другим учащимся, а те в свою очередь ищут неточности или ошибки в решении («оппонируют» - математические бои).
- Кроме листков по определенной теме («тематический листок»), часто составляются листки без общей тематики («разнобой»). Иногда для поддержания интереса задачи из «разнобоя» объединяются общим сюжетом.

ПРИМЕР ПРОСТОГО ЛИСТКА ДЛЯ ПЕРВОГО ВВОДНОГО ЗАНЯТИЯ В 5 КЛАССЕ.

Истории из жизни нашего математического кружка.

1. Математический кружок посещают четыре девочки: Катя, Валя, Таня и Галя. Две из них ровесницы. Известно, что Таня старше Кати, которая моложе Гали, и Таня моложе Вали, которая старше Гали. Как зовут ровесниц?

2. Учитель начал занятие математического кружка с того, что написал на листочке бумаги число 86 и сказал Пете: «Не делая никаких записей, увеличь это число на 12 и покажи мне ответ». Недолго думая, Петя показал ответ. А вы сумеете это сделать?

3. В конце учебного года среди учеников математического кружка была проведена олимпиада, состоящая из 12 задач. За каждую решенную задачу засчитывали 5 очков, а за нерешенную списывали 3 очка. Гена получил 20 очков. Сколько задач он решил правильно?

4. Нина принесла на занятие кружка четыре карандаша и два пенала-косметички. После окончания занятия она каким-то образом сложила их в себе в портфель, и потом сказала, что в одном из пеналов карандашей в два раза больше, чем в другом. Может ли такое быть?

5. На перемене между уроками кружка Федя достал прямоугольную плитку шоколада, разделенную углублениями на 6×8 маленьких прямоугольников. Он решил разделить шоколадку на дольки, чтобы угостить всех кружковцев. Какое наименьшее число раз ему придется разламывать шоколад? (Разламывать можно только по прямым линиям, разделяющим дольки; длина разлома может быть произвольной).

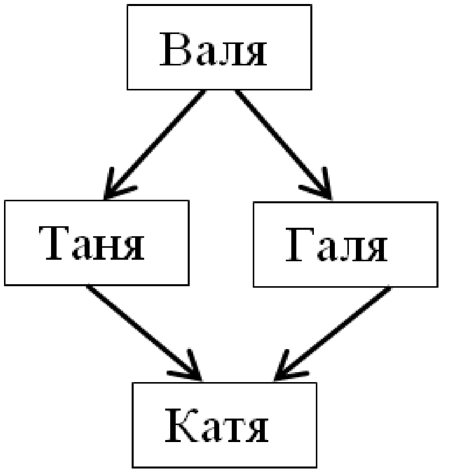
6. Команда нашего кружка участвовала в математическом турнире. Также на этот турнир приехали еще пять команд из других стран: из Польши, Румынии, Болгарии, Венгрии и Чехии. Все команды знают только родной язык. Какое наименьшее число переводчиков, владеющих двумя языками, потребуется, чтобы любая пара команд смогла сыграть математический бой, если любую игру обслуживает: а) произвольное число переводчиков; б) только один переводчик?

7. Перед торжественной линейкой по случаю победы команды нашего кружка на международном турнире ученики расставили все стулья в прямоугольном зале вдоль его стен. Когда пришел учитель, то он подсчитал, что вдоль каждой стены стоит по 10 стульев, а всего в зале – 36 стульев. Как такое возможно?

8. Занятия нашего кружка проходят по субботам. Оказалось, что в некотором месяце три занятия пришлись на четные числа. Какой день недели был 25-го числа этого месяца?

РЕШЕНИЯ (1-2).

1. Математический кружок посещают четыре девочки: Катя, Валя, Таня и Галя. Две из них ровесницы. Известно, что Таня старше Кати, которая моложе Гали, и Таня моложе Вали, которая старше Гали. Как зовут ровесниц?



Изобразим условие задачи графически (стрелочки направлены от старшей девочки к младшей). Видно, что ровесницами могут быть только Таня и Галя.

Комментарии: 1) данный чертеж является ориентированным графом; 2) можно решить задачу без чертежа, если обосновать, что Катя младше всех остальных девочек, а Валя – старше, а значит, ни Катя, ни Валя не могут быть ровесницами ни с кем из этой компании.

2. Учитель начал занятие математического кружка с того, что написал на листочке бумаги число 86 и сказал Пете: «Не делая никаких записей, увеличь это число на 12 и покажи мне ответ». Недолго думая, Петя показал ответ. А вы сумеете это сделать?

86 + 12 = 98, достаточно повернуть листочек на 180°.

РЕШЕНИЯ (3-4).

3. В конце учебного года среди учеников математического кружка была проведена олимпиада, состоящая из 12 задач. За каждую решенную задачу засчитывали 5 очков, а за нерешенную списывали 3 очка. Гена получил 20 очков. Сколько задач он решил правильно?

Если бы Гена решил все задачи, то он получил бы $12 \cdot 5 = 60$ баллов. За каждую нерешенную задачу он потерял $5 + 3 = 8$ баллов, а всего он потерял $60 – 20 = 40$ баллов. Значит, он не решил $40:8 = 5$ задач, а решил $12 – 5 = 7$ задач.

Комментарий: допустимо решение подбором $7 \cdot 5 – 5 \cdot 3 = 20$, но при этом следует добавить, что этот вариант единственный, так как изменение количества решенных задач приводит к изменению количества набранных баллов.

4. Нина принесла на занятие кружка четыре карандаша и два пенала-косметички. После окончания занятия она каким-то образом сложила их в себе в портфель, и потом сказала, что в одном из пеналов карандашей в два раза больше, чем в другом. Может ли такое быть?

Да, Нина положила в каждый пенал по два карандаша, а затем, один из пеналов поместила внутри другого пенала. Тогда во внутреннем пенале два карандаша, а во внешнем – четыре.

РЕШЕНИЯ (5).

5. На перемене между уроками кружка Федя достал прямоугольную плитку шоколада, разделенную углублениями на 6×8 маленьких прямоугольников. Он решил разделить шоколадку на дольки, чтобы угостить всех кружковцев. Какое наименьшее число раз ему придется разламывать шоколад? (Разламывать можно только по прямым линиям, разделяющим дольки; длина разлома может быть произвольной).

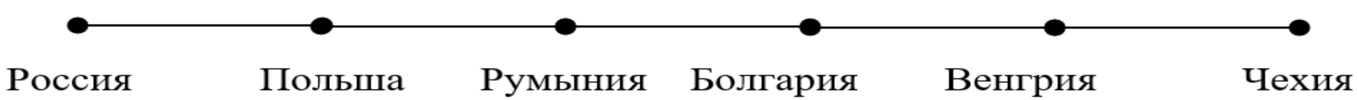
За один разлом количество кусков, на которые разделена шоколадка, увеличивается на 1. Поэтому, чтобы из 1 куска получить 48 кусочков, необходимо произвести 47 разломов.

Комментарий: полезно сначала рассмотреть частные случаи способов разламывания шоколадки на дольки и убедиться, что независимо от способа всегда получается 47 разломов, затем можно аналогично поработать с шоколадками других размеров, и на основе этого сформулировать гипотезу, что для шоколадки $n \times m$ требуется $nm-1$ разломов.

РЕШЕНИЯ (6).

6. Команда нашего кружка участвовала в математическом турнире. Также на этот турнир приехали еще пять команд из других стран: из Польши, Румынии, Болгарии, Венгрии и Чехии. Все команды знают только родной язык. Какое наименьшее число переводчиков, владеющих двумя языками, потребуется, чтобы любая пара команд смогла сыграть математический бой, если любую игру обслуживает: а) произвольное число переводчиков; б) только один переводчик?

а) Изобразим команды точками. Соединим те из этих точек отрезками, для которых имеется переводчик, владеющий языками данных команд. Видно, что достаточно 5 переводчиков.

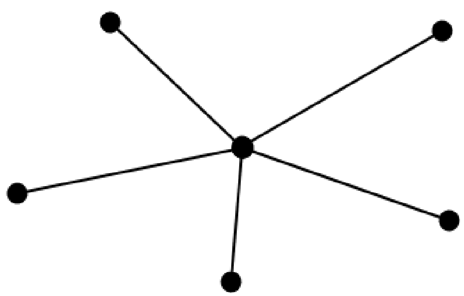


Покажем, что 5 – это наименьшее количество переводчиков. Рассмотрим группу переводчиков, удовлетворяющую условию задачи, и выделим из нее произвольного переводчика №1. Он владеет языками *a* и *b*. Тогда в группу обязательно входит переводчик №2, владеющий одним из языков *a* или *b* (иначе команды *a* и *b* не смогут играть с остальными командами) и ещё каким-то языком *c*. Аналогично, найдется переводчик №3, владеющий одним из языков *a* или *b* или *c*, а также языком *d*, и т.д.

б) Для обслуживания игр, в которых участвует российская команда, необходимо 5 переводчиков. Для обслуживания игр, в которых участвует польская команда (кроме игры с Россией), понадобятся еще 4 переводчика, и т.д. Общее количество переводчиков
5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.

РЕШЕНИЯ (6).

6. Команда нашего кружка участвовала в математическом турнире. Также на этот турнир приехали еще пять команд из других стран: из Польши, Румынии, Болгарии, Венгрии и Чехии. Все команды знают только родной язык. Какое наименьшее число переводчиков, владеющих двумя языками, потребуется, чтобы любая пара команд смогла сыграть математический бой, если любую игру обслуживает: а) произвольное число переводчиков; б) только один переводчик?



Комментарий: 1) при решении задачи используются чертежи, являющиеся неориентированными графами;

2) в пункте а можно привести и другие примеры; на самом деле, подходит любое дерево (т.е. связный граф без циклов);

3) минимальность пяти переводчиков непосредственно следует из теоремы о количестве ребер дерева (в любом дереве количество ребер на единицу меньше количества вершин);

4) пункт б можно решить классическим подсчетом ребер в графе: из каждой из 6 вершин исходит 5 ребер, причем каждое ребро при этом учитывается два раза, т.е. (6·5)/2 = 15;

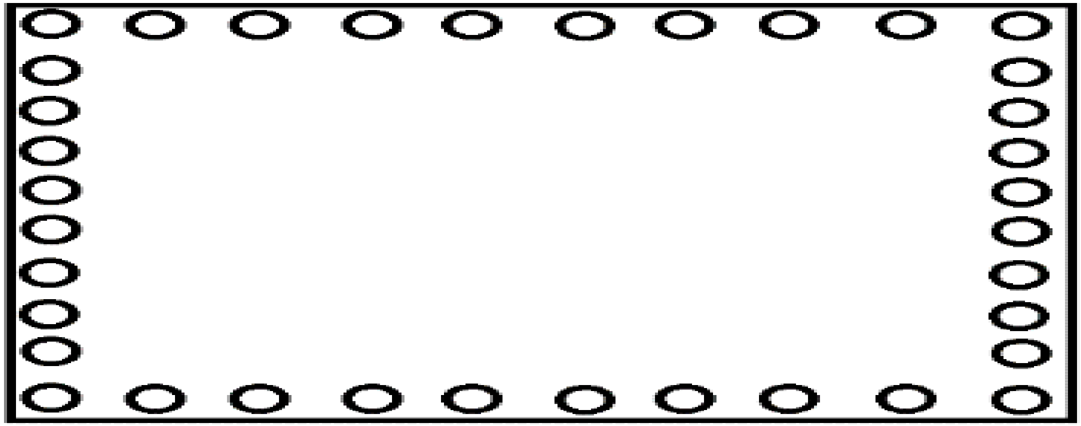
5) пункт б можно решить комбинаторно, как количество сочетаний из 6 элементов по 2:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

РЕШЕНИЯ (7).

7. Перед торжественной линейкой по случаю победы команды нашего кружка на международном турнире ученики расставили все стулья в прямоугольном зале вдоль его стен. Когда пришел учитель, то он подсчитал, что вдоль каждой стены стоит по 10 стульев, а всего в зале – 36 стульев. Как такое возможно?

В каждом углу зала стоит по одну стулу, и, кроме этого, вдоль каждой стены стоят по 8 стульев.



8. Занятия нашего кружка проходят по субботам. Оказалось, что в некотором месяце три занятия пришлись на четные числа. Какой день недели был 25-го числа этого месяца?

Число, на которое приходится следующая в месяце суббота, отличается от предыдущей субботы на 7. Значит, четность этих чисел чередуется и три четных субботы возможны только в том случае, когда месяц содержит 5 суббот. Следовательно, 2-ое, 16-ое и 30-ое числа – это четные субботы, а 25-ое число – это понедельник.

ПРИМЕР ТЕМАТИЧЕСКОГО ЛИСТКА.

Комбинаторика. Правила суммы и произведения.

0. Маша села делать домашнее задание и обнаружила, что у нее нет ни одной пишущей ручки. Она побежала в ближайший магазин, и там ей предложили на выбор 6 видов шариковых ручек и 4 вида гелевых. Сколькими способами Маша может сделать выбор в магазине, если ей необходимо купить: а) одну ручку произвольного вида; б) одну шариковую ручку и одну гелевую?

Раздел математики, изучающий методы подсчета количества возможных выборов объектов с определенными условиями, называется комбинаторикой.

Основные правила комбинаторики:

*Если элемент **a** можно выбрать **m** способами,*
*а элемент **b** можно выбрать **n** способами*
*(независимо от выбора элемента **a**), то:*
*а) выбор **«a и b»** можно сделать **m·n** способами (правило произведения);*
*б) выбор **«a или b»** можно сделать **m + n** способами (правило суммы).*

1. В столовой предлагается на выбор четыре салата, два супа, три вторых блюда и два напитка. Обед состоит из блюд разных категорий (т.е. нельзя выбрать несколько салатов или несколько супов и т.д.). Сколькими способами можно выбрать себе обед, состоящий: а) ровно из одного блюда; б) из второго блюда и напитка; в) из либо салата либо супа и в любом случае напитка; г) из четырех блюд; д) хотя бы из одного блюда?

2. Сколько существует четырехзначных натуральных чисел, запись которых состоит: а) из нечетных цифр; б) из четных цифр; в) из различных четных цифр; г) из двух четных и двух нечетных цифр?

3. Кубик бросают трижды и записывают выпавшие очки (например, «316»). Среди последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?

4. Президент некоторой страны объявил конкурс на создание нового флага. Каждому участнику конкурса выдается одинаковый набор из кусков материи семи цветов. По условию конкурса флаг должен состоять из пяти прямоугольных цветных полос одинакового размера, причем две соседние полосы должны иметь разный цвет. Какое наибольшее количество различных флагов могут сшить участники конкурса?

5. Страна расположена на двух островах. На одном 7 городов, а на другом – 11. Любые два города, расположенные на одном острове, соединены железной дорогой, а любые два города с разных островов соединены паромом. Сколько железнодорожных линий и сколько паромов в этой стране?

6. а) Сколько диагоналей имеется в выпуклом n-угольнике? б) Сколько диагоналей, отсекающих треугольник, имеется в выпуклом n-угольнике?

7. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

8. Сколькими способами можно поставить на шахматной доске белого и чёрного короля, чтобы они не били друг друга?

ПРИМЕР СЛОЖНОГО ТЕМАТИЧЕСКОГО ЛИСТКА.

Радикальная ось.

Определение. *Степенью точки X относительно окружности с центром O и радиусом R называется величина OX^2-R^2.*

1. Докажите, что степень точки относительно окружности равна

- произведению секущей на внешнюю часть (как следствие, квадрату касательной) для точек вне окружности;
- произведению отрезков хорды, на которой лежит точка, взятое со знаком минус, для точек внутри окружности;
- нулю для точек, лежащих на окружности.

Определение. *Геометрическое местом точек, для которых степени относительно двух данных окружностей равны, называется радикальной осью этих окружностей.*

2. Докажите, что радикальная ось является прямой, перпендикулярной линии центров.

3. а) Докажите, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

4. Докажите, что радикальная ось вписанной и вневписанной окружностей треугольника проходит через середину его стороны и перпендикулярна биссектрисе угла, противоположного этой середине.

5. Дан шестиугольник ABCDEF, в котором AB=BC, CD=DE, EF=FA, а углы A и C - прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.

6. На сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.

7. Даны три окружности, центры которых не совпадают и не лежат на одной прямой. Найдите ГМТ точек, степени которых относительно этих окружностей одинаковы.

Замечание. *Это ГМТ называется «радикальным центром» трёх окружностей.*

8. В треугольнике ABC на стороне AB выбрали точки X и Y, на стороне BC - точки Z и T, на стороне AC - точки U и V. Оказалось, что четырехугольники XYZT, ZTVU и XYVU вписанные. Докажите, что шестиугольник XYZTUV тоже вписанный.

9. AB и AC - касательные к окружности. M и N - середины отрезков AB и AC соответственно. P - произвольная точка прямой MN. Докажите, что PA=PD, где PD - касательная к окружности.

ОСНОВНЫЕ БЛОКИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ В 5-6 КЛАССАХ.

1. **Затруднительные положения (конструктивные задачи)**. Задачи на переправы, разъезды, переливания, взвешивания.
2. **Натуральные числа:**
   1) выполнение арифметических действий и сравнение чисел;
   2) моделировании прикладных ситуаций;
   3) свойства, связанные с делимостью.

Перечислим основные виды задач в соответствии с выделенными типами:

1) *числовые ребусы, быстрый счет, магические квадраты, треугольник Паскаля, десятичная запись числа, системы счисления, сравнение чисел;*

2) *принцип «плюс-минус один», двойной подсчет, разбиение на пары, обратный ход (числовые фокусы), подсчет двумя способами, часы, календарь, возраст, деньги* и т.д.;

3) *делимость, арифметика остатков, признаки делимости и равноостаточности, простые и составные числа, разложение на простые множители, количество делителей, НОД и НОК, алгоритм Евклида*.

ОСНОВНЫЕ БЛОКИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ В 5-6 КЛАССАХ.

3. **Логические задачи.**

Прямое и обратное утверждение, отрицание, логические «и» и «или», рыцари и лжецы, следствие из утверждений (некоторые из которых ложны), доказательство от противного, принцип Дирихле, игры и т.д.

4. **Геометрия.**

П*одсчет количества фигур, разрезания, перекладывание фигур (в том числе, спички), замощение областей без пробелов и наложения, обходы, развертки, геометрия на клетчатой бумаге.*

5. **Множества и комбинаторика.**

Описание множеств, действия над множествами, диаграммы Эйлера-Венна, полный перебор случаев, формула исключений и включений, правила сложения и умножения, перестановки, размещения, сочетания.

6. **Графы.**

Изображение условия задачи в виде графа, количество ребер, лемма о рукопожатиях, компоненты связности, эйлеровость и полуэйлеровость.

ПОЛЕЗНЫЕ САЙТЫ.

1. Малый мехмат МГУ. http://mmmf.msu.ru/ Готовые листочки есть в разделах «Материалы занятий», «Архив», «Малый мехмат – школе» (пособие для преподавателей содержит решения!).

2. Интернет-проект «Задачи». http://www.problems.ru . Огромная база конкурсных задач, классифицированных по темам, методам, сложности, классу.

3. Кировская летняя многопредметная школа (ЛМШ) http://cdoosh.ru/lmsh/lmsh-archives/

4. Казанские математические кружки. http://www.kazan-math.info Разделы «Задачи», «Дилемма».

5. Сайт подготовки к олимпиадам, ДВИ и ЕГЭ по математике https://mathus.ru/math/

6. Страничка Александра Шаповалова. http://ashap.info/indexrus.htm

ПОЛЕЗНЫЕ КНИГИ.

1. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: АСА, 1994.

2. Кострикина Н.П. Задачи повышенной сложности в курсе математики 4-5 классов. – М.: Просвещение, 1986.

3. Козлова Е.Г. Сказки и подсказки. – М.: МЦНМО, 2004.

4. Бураго А. Дневник математического кружка: первый год занятий. – М.: МЦНМО, 2019.

5. Фарков А. В. Математические олимпиады: методика подготовки и проведения. – М. Вако, 2018.

6. Книги серии «Школьные математические кружки» Московского центра непрерывного математического образования».

Можно ознакомиться и приобрести на сайте https://biblio.mccme.ru/publications/books/series/170