

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

I. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§1. Понятие двойного интеграла.

Пусть $f(x, y)$ - любая функция двух переменных (не обязательно положительная), непрерывная в некоторой области D , ограниченной замкнутой линией. Разобьём область D на частичные, выберем в каждой частичной области произвольной точке $P_i(x_i, y_i)$ и составим сумму: $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i$, (*)

где $f(x_i, y_i)$ - значение функции в точке P_i и $\Delta \sigma_i$ - площадь частичной области.

Сумма (*) называется n -й интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D , соответствующей данному разбиению этой области на n частичных областей.

Определение: Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел, к которому стремится n -я интегральная сумма (*) при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma$$

Теорема (существования двойного интеграла): Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D , ограниченной замкнутой линией, то её n -я интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел, т.е. двойной интеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$, не за-

висит от способа разбиения области D на частичные области σ_i и от выбора в них точек P_i .

Двойной интеграл представляет собой число, зависящее только от подынтегральной функции и области интегрирования и вовсе не зависящее от обозначения переменных интегрирования.

§2. Свойства двойных интегралов.

1. Двойной интеграл от суммы конечного числа функций равен сумме двойных интегралов от слагаемых функций

$$\iint_D [f(x, y) + \varphi(x, y) + \dots + \psi(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma + \iint_D \varphi(x, y) d\sigma + \dots + \iint_D \psi(x, y) d\sigma$$

2. Постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ двойного интеграла: $\iint_D c f(x, y) d\sigma = c \iint_D f(x, y) d\sigma$.

3. Если область интегрирования D разбита на две части D_1 и D_2 то

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

4. Если во всех точках области D функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условию $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$, то $\iint_D f(x, y) d\sigma \geq \iint_D \varphi(x, y) d\sigma$. (Знак неравенства может перейти в знак равенства только тогда, когда обе функции совпадают).

Из свойства (4), в частности следует, что, если подынтегральная функция в области интегрирования не меняет знака, то двойной интеграл есть число того же знака, что и функция.

Свойство (3) и следствие из свойства (4) позволяют уточнить **геометрический смысл** двойного интеграла. Условимся объёму цилиндрического тела, расположенного над плоскостью Oxy , приписывать знак "плюс", а расположенного под плоскостью Oxy - знак "минус". Тогда, если $z=f(x, y)$ - уравнение ограничивающей поверхности, то двойной интеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$ является алгебраической суммой объёмов тел, соответствующих положительным и отрицательным значениям функции $f(x, y)$.

Если в двойном интеграле подынтегральная функция тождественно равна "1", то двойной интеграл равен площади S области интегрирования: $\iint_D d\sigma = S$

В этом случае двойной интеграл выражает объём прямого цилиндра с высотой, равной единице, этот объём численно равен площади основания цилиндра.

5. Если функция $f(x, y)$ во всех точках области интегрирования D удовлетворяет неравенствам: $m \leq f(x, y) \leq M$, то $mS < \iint_D f(x, y) d\sigma < MS$, где S - площадь области D .

6. **Теорема (о среднем):** Двойной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования, т.е. $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)S$.

Значение $f(\xi, \eta)$, находимое из последнего равенства, называется **средним значением функции $f(x, y)$ в области D** .

§ 3. Вычисление двойных интегралов.

Разобьём область интегрирования D в плоскости Oxy на частичные области посредством двух систем координатных линий: $x=const$, $y=const$. Этими линиями служат прямые, параллельные соответственно оси Oy и оси Ox , а частичными областями - прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат. Ясно, что площадь каждой частичной области $\Delta\sigma$ будет равна произведению соответствующих Δx и Δy . Поэтому элемент площади $d\sigma$ мы запишем в виде: $d\sigma = dx dy$, т.е. элемент площади в **декартовых координатах** является произведением дифференциалов независимых переменных.

Имеем:
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (*)$$

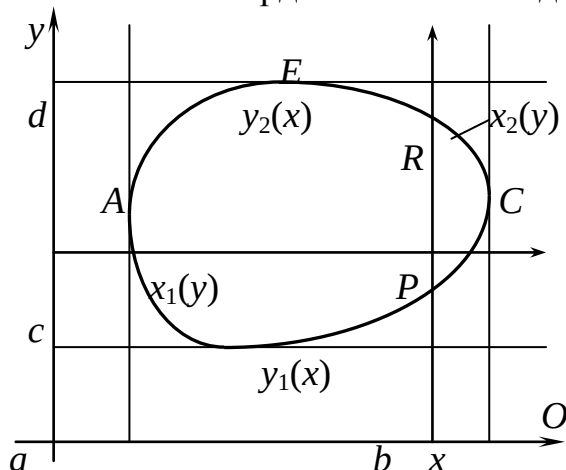
Для определения **объёма тела** имеет место формула:
$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (**)$$

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ c \leq y \leq d, \end{cases} \text{ стороны которого касаются границы области в точках } A, B, C, E.$$

Точками A и C граница разбивается на две линии: ABC и AEC , каждая из которых пересекается с любой прямой, параллельной оси Oy , в одной точке. Поэтому их уравнения можно записать в форме, разрешённой относительно y :

Аналогично точками B и E граница разбивается на линии BAE и BCE , уравнения которых можно записать так:

Рассечём рассматриваемое цилиндрическое тело произвольной плоскостью, параллельной плоскости Oyz , т.е. $x=const$, $a \leq x \leq b$. В сечении мы получим криволинейную трапецию $PMNR$, площадь которой выражается интегралом от функции $f(x, y)$, рассматриваемой как функция одной переменной y , причём y изменяется от ординаты точки P до ординаты точки R .


$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{даёт выражение для}$$

Ясно, что величина этого интеграла зависит от выбранного значения x ; другими словами, площадь рассматриваемого поперечного сечения является некоторой функцией от x , мы обозначим её через $S(x)$: $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$.

Согласно формуле (**) объём всего тела будет равен интегралу от $S(x)$ в интервале изменения x ($a \leq x \leq b$). Заменяя в этой формуле $S(x)$ её выражением, окончательно получим: $V = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$

или в более удобной форме: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$. (A)

Пределы внутреннего интеграла переменные; они указывают границы изменения переменной интегрирования y при постоянном значении второго аргумента x . Пределы внешнего интеграла постоянны; они указывают границы, в которых может изменяться аргумент x .

Меняя роли x и y , то есть рассматривая сечения тела плоскостями $y = \text{const}$ ($c \leq y \leq d$), мы найдём сначала, что площадь $Q(y)$ такого сечения равна $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$, где y при интегрировании считается величиной постоянной. Интегрируя затем $Q(y)$ в пределах изменения y , т.е. от c до d , мы придём ко второму

выражению для двойного интеграла: $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$. (Б)

Здесь интегрирование совершается сначала по x , а потом по y .

Формулы (A) и (Б) показывают, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определённых интегралов; нужно только помнить, что во внутреннем интеграле одна из переменных принимается при интегрировании за постоянную. Для краткости правые части формул (A) и (Б) называют *повторными* (или *двукратными*) интегралами, а сам процесс установления пределов интегрирования - *приведением двойного интеграла к повторному*.

Формулы приведения двойного интеграла к повторному приобретают особенно простой вид, когда область D является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат. В этом случае становятся постоянными пределы не только внешнего, но и внутреннего интегралов:

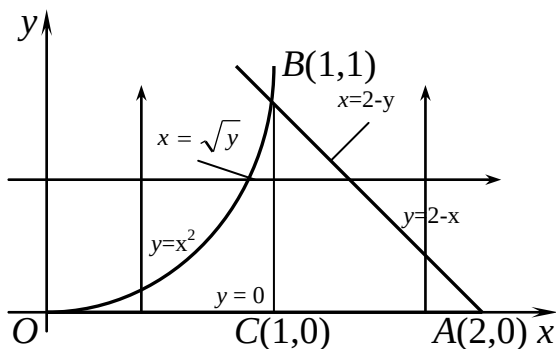
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

В других случаях для сведения двойного интеграла к повторному необходимо прежде всего построить область интегрирования; лучше всего изобразить эту область прямо в плоскости Oxy . Затем нужно установить порядок интегрирования, то есть наметить, по какой переменной будет производиться внут-

ренное интегрирование, а по какой внешнее, и расставить пределы интегрирования.

Пример. Привести к повторному интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$, если область D ограничена линиями $y=0$, $y=x^2$ и $x+y=2$.

Решение: Вид области D указывает на то, что удобнее интегрировать сначала по x , а потом по y : $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x, y) dx$.



Если мы изменим порядок интегрирования, то результат уже не удастся записать в виде одного повторного интеграла, так как линия OBA имеет на разных участках разные уравнения. Разбивая область D на две: OBC и CBA , получим:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{2-x}^0 f(x, y) dy.$$

Этот пример показывает, как важно с самого начала продумать порядок интегрирования.

Формула преобразования двойного интеграла от декартовых координат к полярным: $I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$. (выражение $d\sigma = r dr d\varphi$ называется элементом площади в полярных координатах.)

Правило преобразования двойного интеграла к полярным координатам: Для того чтобы преобразовать двойной интеграл в декартовых координатах в двойной интеграл в полярных координатах, нужно x и y в подынтегральной функции заменить соответственно через $r \cos \varphi$ и $r \sin \varphi$, а произведение $dx dy$ заменить произведением $r dr d\varphi$.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, так же как и в декартовой, сводится к последовательному интегрированию по переменным r и φ . Укажем правила расстановки пределов.

1. Пусть полюс не содержится внутри области интегрирования D , заключенной между лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, и координатные линии $\varphi=const$ встречаются её границу не более чем в двух точках. Полярные уравнения кривых ADC и ABC пусть будут $r=r_1(\varphi)$ и $r=r_2(\varphi)$. Интегрируя сначала по r в пределах его изменения при постоянном φ , т.е. от $r_1(\varphi)$ до $r_2(\varphi)$, а затем по φ от φ_1 до φ_2 , полу-

чим: $I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$. Интегрирование в обратном порядке, т.е.

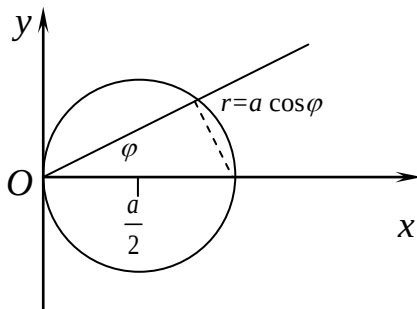
сначала по φ , а потом по r , обычно не встречается.

В частном случае, когда область интегрирования служит частью кругового кольца $r_1 \leq r \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, пределы интегрирования постоянны по обеим переменным:
$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

2. Пусть полюс интегрирования содержится внутри области интегрирования и любой полярный радиус пересекает границу в одной точке (так называемая звёздная относительно полюса область). Интегрируя сначала по r , а затем по φ , получим:
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr,$$
 где $r=r(\varphi)$ есть полярное уравнение границы области.

В частности, при $r=r(\varphi)=R=const$, т.е. когда область интегрирования есть круг с центром в полюсе, будем иметь:
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Пример. Расставить пределы интегрирования в полярных координатах, если область D - круг $x^2+y^2 \leq ax$.



Перейдя к полярным координатам, получим уравнение окружности в виде $r=a \cos \varphi$. Здесь $r_1(\varphi)=0$ и $r_2(\varphi)=a \cos \varphi$. Пределы изменения по φ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

§4. Формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема тела и площади поверхности.

Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D , находится по формуле:
$$S = \iint_D dx dy.$$

Если область D определена, например, неравенствами

$$a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \text{ то } S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

Если область D в полярных координатах определена неравенствами

$$\alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi(\theta) \leq \rho \leq f(\theta), \text{ то } S = \iint_D \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)} \rho d\rho.$$

Объём цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)$, снизу плоскостью $z=0$ и сбоку цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости xOy область D , вычисляется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Если гладкая поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$, то *площадь поверхности* выражается формулой $S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$, где D - проекция данной поверхности на плоскость xOy . Аналогично, если поверхность задана уравнением $x=f(y, z)$, то $S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$, где D - проекция поверхности на плоскость yOz ; если же уравнение поверхности имеет вид $y=f(x, z)$, то $S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz$, где D - проекция поверхности на плоскость xOz .

§5. Приложения двойных интегралов к задачам механики.

Масса плоской пластинки переменной плотности вычисляется по формуле: $M = \iint_D \delta(x, y) d\sigma$. (где плотность во всех точках частичной области постоянна и

равна плотности $\delta(x_i, y_i)$ в выбранной точке)

Статические моменты пластинки: $M_x = \iint_D y \delta(x, y) d\sigma$, $M_y = \iint_D x \delta(x, y) d\sigma$.

Координаты центра тяжести пластинки:

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x \delta(x, y) d\sigma}{\iint_D \delta(x, y) d\sigma}, \quad \eta = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y \delta(x, y) d\sigma}{\iint_D \delta(x, y) d\sigma}.$$

Если пластинка однородна, т.е. $\delta(x, y) = \text{const}$, то формулы упрощаются:

$$\xi = \frac{\iint_D x d\sigma}{S}, \quad \eta = \frac{\iint_D y d\sigma}{S}, \quad \text{где } S - \text{площадь пластинки.}$$

Моменты инерции пластинки: Моментом инерции пластинки P с массой m относительно какой-либо оси называется произведение массы на квадрат расстояния точки P от этой оси. $I_x = \iint_D y^2 d\sigma$, $I_y = \iint_D x^2 d\sigma$. (считая, что $\delta(x, y) \equiv 1$).

Интеграл $\iint_D x y d\sigma$ называется *центробежным моментом инерции*; он обозначается I_{xy}

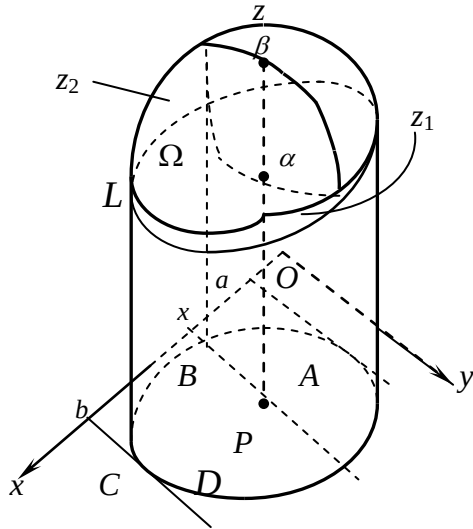
В механике часто рассматривают *полярный момент инерции* точки, равный произведению массы точки на квадрат её расстояния до данной точки - полюса. Полярный момент инерции пластинки относительно начала координат будет равен $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) d\sigma = I_x + I_y$.

Моменты инерции пластинки относительно осей координат:

$$I_x = \iint_D y^2 d\sigma, \quad I_y = \iint_D x^2 d\sigma. (\delta(x, y) \equiv 1)$$

§6. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл.

Дадим определение тройного интеграла, исходя из задачи отыскания массы неоднородного тела. Рассмотрим тело, занимающее пространственную область Ω , и предположим, что плотность распределения массы в этом теле является непрерывной функцией координат точек тела: $\delta = \delta(x, y, z)$. Разобьём тело



произвольным образом на n частей; объёмы этих частей обозначим $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$. Выберем затем в каждой части по произвольной точке $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Полагая, что в каждой частичной области плотность постоянна и равна её значению в точке P_i , мы получим приближённое выражение для массы всего тела в виде суммы

$$M_n = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i. (*)$$

Предел этой суммы при условии, что $n \rightarrow \infty$ и каждое частичное тело стягивается в точку и даёт массу M тела:

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i = \iiint_{\Omega} \sigma(x, y, z) dv.$$

Сумма (*) называется n -й *интегральной суммой*, а её предел - *тройным интегралом от функции $\delta(x, y, z)$ по пространственной области Ω* .

К вычислению тройного интеграла, помимо определения массы тела, приводят и другие задачи. Поэтому будем рассматривать тройной интеграл

$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i$, где $f(x, y, z)$ -произвольная непрерывная в области Ω функция.

Терминология для тройных интегралов совпадает с соответствующей терминологией для двойных интегралов. Точно так же формулируется и теорема существования тройного интеграла.

Свойства двойных интегралов полностью переносятся на тройные интегралы. Заметим только, что если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ тождественно равна 1, то тройной интеграл выражает объём V области Ω : $\iiint_{\Omega} dv = V$.

Потому свойства (5) и (6) надо сформулировать следующим образом:

5'. Если функция $f(x, y, z)$ во всех точках области интегрирования Ω удовлетворяет неравенствам $m \leq f(x, y, z) \leq M$, то $mV < \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv < MV$, где V - объём области Ω .

б'. Тройной интеграл равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования на объём области интегрирования, т.е. $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta) V$.

Вычисление тройного интеграла $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$, так же как и двойного,

может быть осуществлено посредством ряда последовательных интегрирований. Мы ограничимся описанием соответствующих правил.

Декартовы координаты: Пусть дан тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$: $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$, причём область Ω отнесена к системе декартовых координат

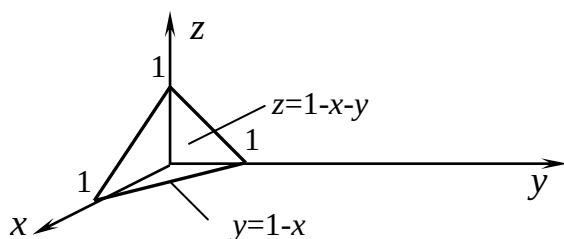
$Oxyz$. Разобьём область интегрирования Ω плоскостями параллельными координатным плоскостям. Тогда частичными областями будут параллелепипеды с гранями, параллельными плоскостям Oxy , Oxz , Oyz и $dv = dxdydz$. В соответствии с этим будем писать: $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz$. Пусть область интегрирования оп-

ределяется следующим образом: $x \in [a, b]$, $y(x) \in [c, d]$, $z(x, y) \in [k, l]$, тогда имеет место равенство: $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x, y, z) dz$.

Пример. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dxdydz$, где Ω - об-

ласть, ограниченная координатными плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и плоскостью $x+y+z=1$.

Решение:



Решение: Интегрирование по z совершается от $z=0$ до $z=1-x-y$. Поэтому, обозначая проекцию области Ω на плоскость Oxy через D , получим:

$$I = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz = \iint_D \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dxdy =$$

$$= \iint_D \left[(x + y) - (x + y)^2 + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \right] dxdy.$$

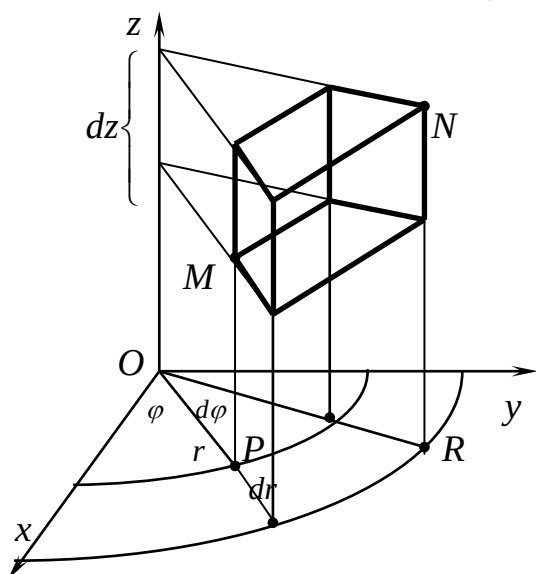
Расставим теперь пределы интегрирования по области D - треугольнику, уравнения сторон которого $x=0$, $y=0$, $x+y=1$:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x + y) - (x + y)^2 + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \right] dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{(x + y)^2}{2} - \frac{(x + y)^3}{3} - \frac{(1 - x - y)^3}{6} \right]_0^{1-x} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1 - x)^3}{6} \right] dx = \frac{1}{8}.$$

Цилиндрические координаты: Отнесём область Ω к системе цилиндрических координат (r, φ, z) в которой положение точки M в пространстве определяется

полярными координатами (r, φ) её проекции P на плоскость Oxy и её аппликаты (z) . Установим связь между декартовыми и цилиндрическими координатами



точки M , именно: $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$, $z=z$. (*) Разобьём область Ω на частичные области v_i тремя системами координатных поверхностей: $r=\text{const}$, $\varphi=\text{const}$, $z=\text{const}$, которыми будут соответственно круговые цилиндрические поверхности, осью которых является ось Oz , полуплоскости, проходящие через ось Oz и плоскости, параллельные плоскости Oxy . Частичными областями v_i служат прямые цилиндры MN . Так как объём цилиндра MN равен площади основания, умноженной на высоту, то для элемента объёма получаем выражение $dv=r dr d\varphi dz$.

Преобразование тройного интеграла $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ к цилиндрическим координатам

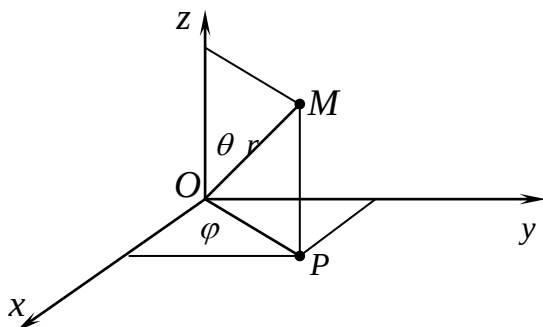
производится совершенно аналогично преобразованию двойного интеграла к полярным. Для этого нужно в выражении подынтегральной функции $f(x, y, z)$ переменные x, y, z заменить по формулам (*) и взять элемент объёма равным $r dr d\varphi dz$. Получим $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$.

Если $f(x, y, z)=1$, то интеграл выражает объём V области Ω : $\iiint_{\Omega} r dr d\varphi dz$.

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах приводится к интегрированию по r , по φ и по z так же, как в декартовых координатах. Если областью интегрирования служит внутренность цилиндра $r \leq R$, $0 \leq z \leq h$, то пределы трёхкратного интеграла постоянны и не меняются при перемене порядка интегрирования:

$$I = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr.$$

Сферические координаты: Отнесём теперь область интегрирования Ω к системе сферических координат (r, θ, φ) . В этой системе координат положение точки M в пространстве определяется её расстоянием r от начала координат (длина радиуса-вектора точки), углом θ между радиусом-вектором точки и осью Oz и углом φ между проекцией радиуса-вектора точки на плоскость Oxy и осью Ox . При этом θ может изменяться от 0 до π , а φ - от 0 до 2π . Связь между сферическими и декартовыми координатами легко устанавливается. Имеем:



радиуса-вектора точки), углом θ между радиусом-вектором точки и осью Oz и углом φ между проекцией радиуса-вектора точки на плоскость Oxy и осью Ox . При этом θ может изменяться от 0 до π , а φ - от 0 до 2π . Связь между сферическими и декартовыми координатами легко устанавливается. Имеем:

$$MP = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r \cos\theta, \quad OP = r \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = r \sin\theta, \quad x = OP \cos\varphi \text{ и } y = OP \sin\varphi.$$

Отсюда: $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$. (**)

Заменив в тройном интеграле x, y, z по формулам (**) и взяв элемент объёма равным полученному выражению, будем иметь:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

§ 7. Применение тройных интегралов.

Применение тройных интегралов к вычислению статических моментов и моментов инерции пространственных тел основано на тех же принципах, что и применение двойных интегралов к вычислению соответствующих моментов плоских пластинок.

Координаты центра тяжести: Пусть статические моменты относительно координатных плоскостей Oxy , Oxz , Oyz соответственно M_{xy} , M_{xz} , M_{yz} . Получим следующие формулы для координат ξ , η , ζ центра тяжести неоднородного тела, плотность которого задаётся функцией $\delta(x, y, z)$, занимающего область Ω :

$$\xi = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint_{\Omega} x \delta dv}{\iiint_{\Omega} \delta dv}, \quad \eta = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint_{\Omega} y \delta dv}{\iiint_{\Omega} \delta dv}, \quad \zeta = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint_{\Omega} z \delta dv}{\iiint_{\Omega} \delta dv}.$$

Для однородного тела ($\delta = \text{const}$): $\xi = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{V}$, $\eta = \frac{\iiint_{\Omega} y dv}{V}$, $\zeta = \frac{\iiint_{\Omega} z dv}{V}$, (V -объём).

Пример. Найти центр тяжести однородного полушара Ω :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0.$$

Решение: Две координаты центра тяжести (ξ и η) равны нулю, ибо полушар симметричен оси Oz (тело вращения с осью Oz).

Интеграл $\iiint_{\Omega} z dv$ удобно вычислить, перейдя к сферическим координатам:

$$\iiint_{\Omega} z dv = \iiint_{\Omega} r \cos\theta r^2 dr d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

Так как объём полушара равен $\frac{2}{3} \pi R^3$, то $\zeta = \frac{\frac{1}{4} \pi R^4}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R$.

Моменты инерции: Так как квадраты расстояний от точки $P(x, y, z)$ до Ox , Oy , Oz соответственно равны $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$, $x^2 + y^2$, при $\delta \equiv 1$, получим формулы:

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dv, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) dv, \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv.$$

Как и в плоском случае, интегралы $I_{xy} = \iiint_{\Omega} xydv$, $I_{yz} = \iiint_{\Omega} yzdv$, $I_{zx} = \iiint_{\Omega} zxdv$ называются *центробежными моментами инерции*.

Для *полярного* момента инерции формула имеет вид: $I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)dv$.

Если тело неоднородное, то в каждой формуле под знаком интеграла будет находиться дополнительный множитель $\delta(x, y, z)$ - плотность тела в точке P .

Пример. Вычислить полярный момент инерции однородного шара радиуса R .

Решение: В этом случае очень удобно перейти к сферическим координатам. Будем иметь: $I_0 = \delta \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r^2 dr = \frac{4\pi\delta R^5}{5} = \frac{3}{5}MR^2$, где M - масса шара. Так как для сферы моменты инерции относительно осей координат равны между собой, то, учитывая, что $I_x + I_y + I_z = 2I_0$, получим $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2$.

§8. Интегралы, зависящие от параметра.

Интегралы с конечными пределами: Пусть задана функция $f(x, \lambda)$, которая определена и непрерывна при всех значениях x и λ , удовлетворяющих условиям: $a \leq x \leq b$ и $\alpha \leq \lambda \leq \beta$. Если вычислять интеграл $\int_a^b f(x, \lambda)dx$ при различных

значениях $\lambda \in [\alpha, \beta]$, то каждому значению λ будет соответствовать своё значение интеграла, являющегося, таким образом, некоторой функцией от λ ; обозначим её через $F(\lambda)$: $F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda)dx$.

Интервал интегрирования $[a, b]$ предполагается конечным. Интервал $[\alpha, \beta]$ - область определения функции $F(\lambda)$ - может быть как конечным, так и бесконечным.

Пример. $\int_0^1 e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^1 = \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}$, если $\lambda \neq 0$. При $\lambda = 0$ интеграл равен 1. Здесь функция $F(\lambda)$ определена и непрерывна при всех значениях λ .

Теорема 1. Если функция $f(x, \lambda)$ непрерывна при $a \leq x \leq b$ и $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, то функция $F(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda)dx$ непрерывна в интервале $[\alpha, \beta]$.

Теорема 2. Если функция $f(x, \lambda)$ и её частная производная $f'_\lambda(x, \lambda)$ непрерывны при $a \leq x \leq b$ и $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, то функция $F(\lambda)$ имеет непрерывную производную $F'(\lambda)$ и справедлива формула: $F'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_a^b f(x, \lambda)dx = \int_a^b f'_\lambda(x, \lambda)dx$

Коротко её формулируют так: *производная от интеграла по параметру равна интегралу от производной подынтегральной функции по этому параметру*. Это предложение называется *правилом Лейбница*.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра: Ограничимся рассмотрением наиболее часто встречающихся несобственных интегралов вида:

$F(\lambda) = \int_a^{\infty} f(x, \lambda) dx$. Областью определения функции $F(\lambda)$ служит совокупность значений λ , при которых интеграл (конечный или бесконечный) (*) сходится.

Например, пусть $F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 x} dx = \frac{e^{-\lambda^2 x}}{-\lambda^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda^2}$ ($e^{-\lambda^2 x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$).

Подынтегральная функция непрерывна при всех значениях x и λ ; функция же $F(\lambda)$ имеет бесконечный разрыв при $\lambda=0$.

Определение: Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x, \lambda) dx$, зависящий от параметра λ , называется правильно сходящимся, если можно указать такую положительную функцию $\varphi(x)$, что при всех рассматриваемых значениях x и λ соблюдается неравенство $|f(x, \lambda)| \leq \varphi(x)$ и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x) dx$ сходится.

Свойства сходящихся несобственных интегралов:

1. Если функция $f(x, \lambda)$ непрерывна при $x \geq a$ и $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ и интеграл $F(\lambda) = \int_a^{\infty} f(x, \lambda) dx$ сходится правильно, то он является непрерывной функцией параметра λ .

2. Если при этом функция $f(x, \lambda)$ имеет непрерывную частную производную $f'_\lambda(x, \lambda)$ и интеграл от этой производной тоже сходится правильно, то функция $F(\lambda)$ дифференцируема и справедлива формула:

$$F'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_a^{\infty} f(x, \lambda) dx = \int_a^{\infty} f'_\lambda(x, \lambda) dx.$$

II КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ.

§9. Криволинейный интеграл по координатам (II рода).

Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - функции двух переменных, непрерывные в некоторой области D , и L - гладкая линия, целиком расположенная в этой области. Разобьём линию L на n участков и в каждом таком участке выберем по произвольной точке $B_k(\xi_k, \eta_k)$ (в частности эти точки могут совпадать с концами участков). Обозначим проекции k -го участка на оси координат через Δx_k и Δy_k и составим сумму: $\sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k$. (**). Она называется n -й интегральной суммой по линии L .

Определение: Криволинейным интегралом по линии L (II рода) называется предел n -й интегральной суммы (*) при стремлении к нулю длины наибольшего частичного участка разбиения кривой L .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(x_k, y_k) \Delta x_k + Q(x_k, y_k) \Delta y_k = \int_L P(x, y) + Q(x, y) dy$$

Линия L называется *линией* или *контуром интегрирования*. Точка B называется *начальной*, а точка C - *конечной точками интегрирования*.

В частности, если $Q(x, y) \equiv 0$, то интеграл имеет вид: $\int_L P(x, y) dx$ и называется *криволинейным интегралом по координате x* . Аналогично, если $P(x, y) \equiv 0$, то $\int_L Q(x, y) dy$ называется *криволинейным интегралом по координате y* .

§ 10. Вычисление криволинейных интегралов, интегралы по замкнутому контуру.

Правило вычисления криволинейного интеграла: Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, взятый по линии $x=x(t)$, $y=y(t)$, преобразовать в обыкновенный, нужно в подынтегральном выражении заменить x , y , dx и dy их выражениями через t и dt и вычислить получившийся интеграл по интервалу изменения параметра t :

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_B}^{t_C} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt,$$

где t_B и t_C - значения параметра t , соответствующие точкам B и C линии L .

Следствие: криволинейный интеграл существует, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны, а $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными, причём, линия L гладкая, т.е. имеет непрерывно меняющуюся касательную. Впрочем, линия L может состоять и из нескольких участков, на каждом из которых это условие выполняется. Тогда при переходе к обыкновенному интегралу надо линию L разбить на эти участки и рассматривать весь интеграл как сумму интегралов по отдельным участкам.

Если уравнение линии L может быть задано в виде $y=y(x)$, то, полагая в общей формуле преобразования $t=x$, получим:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_B}^{x_C} \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\} dx,$$

где x_B и x_C - абсциссы точек B и C .

Если отдельные участки контура интегрирования заданы уравнениями различных видов, то этот контур нужно разбить на части и интеграл вычислять как сумму интегралов по отдельным участкам.

1. Если контур интегрирования L - *отрезок прямой, параллельной оси абсцисс*, то криволинейный интеграл сразу превращается в обыкновенный. Так как

$$y=y_0 \text{ и } dy=0, \text{ то } \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_0) dx.$$

2. Если L - *отрезок прямой, параллельной оси ординат*, то $x=x_0$, $dx=0$ и

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_1}^{y_2} Q(x_0, y)dy$$

Замечание: если направление интегрирования по незамкнутому контуру заменить на противоположное, то криволинейный интеграл изменит знак на противоположный: $\int_{-L} Pdx + Qdy = - \int_{+L} Pdx + Qdy$, где через $-L$ и $+L$ обозначена линия

L при двух её взаимно противоположных направлениях.

если L - замкнутый контур, то направление интегрирования в интеграле $\oint_L Pdx + Qdy$ всегда будет положительным; интегрирование же в отрицательном

направлении обозначается так: $\oint_{-L} Pdx + Qdy$.

Теорема 1. Если область D , ограниченную замкнутой линией L , разбить на две части D_1 и D_2 , то криволинейный интеграл по всей линии L равен сумме интегралов, взятых в том же направлении по линиям L_1 и L_2 , ограничивающим области D_1 и D_2 .

Теорема 2 (формула Грина.). Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области D , то имеет место формула

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy, \quad (*)$$

где L - граница области D и интегрирование вдоль L производится в положительном направлении.

Независимость интеграла от линии интегрирования.

Лемма. Для того чтобы криволинейный интеграл $(*)$ не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю.

Замечание. Условимся называть односвязной областью часть плоскости, ограниченную одной замкнутой линией.

Теорема 3. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D . Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ $(*)$ не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D соблюдалось равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (**)$$

Теорема 4. Для того, чтобы криволинейный интеграл $(*)$ не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы его подынтегральное выражение было полным дифференциалом.

Следствие: если область D односвязна и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными непрерывны в этой области, то все четыре следующих утверждения равносильны, т.е. если выполняется одно из них, то выполняются и все остальные:

1. Криволинейный интеграл $\int Pdx + Qdy$, взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области D , равен нулю.
2. Криволинейный интеграл $\int Pdx + Qdy$ не зависит от линии интегрирования.
3. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом.
4. Во всех точках области D имеет место равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

§11. Интегрирование полных дифференциалов. Первообразная функция.

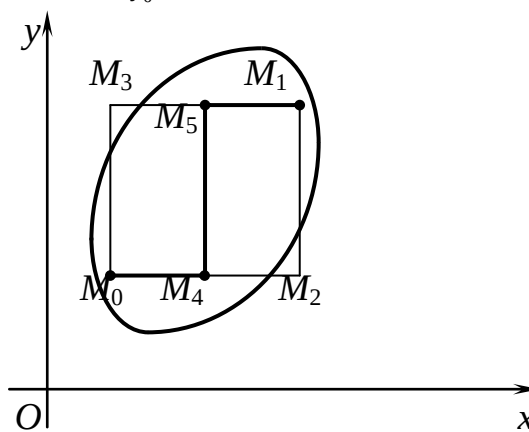
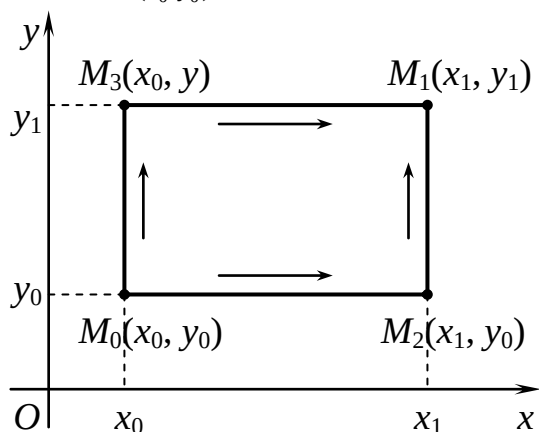
Если подынтегральное выражение в криволинейном интеграле

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (*)$$

является полным дифференциалом, то при соблюдении всех условий, сформулированных в основной теореме, величина этого интеграла зависит исключительно от начальной и конечной точек линии интегрирования. Поэтому интеграл (*) записывается обычно в виде

$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, где (x_0, y_0) - координаты начальной точки линии интегрирования, а (x_1, y_1) - конечной. Будем интегрировать по ломаной $M_0M_2M_1$ (или $M_0M_3M_1$), звенья которой параллельны осям координат. Так как на участке M_0M_2 : $y=y_0$ и $dy=0$, а на участке M_2M_1 : $x=x_1$ и $dx=0$, то

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)dy. \quad (**)$$



Если окажется, что ломаные, что ломаные $M_0M_2M_1$ выходит из области D , где выполняются условия основной теоремы, то можно производить интегрирование, например, по ломаной $M_0M_4M_5M_1$.

Рассмотрим теперь интеграл с фиксированной начальной точкой $M_0(x_0, y_0)$

и переменной конечной $M(x, y)$:
$$I(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (***)$$

Величина этого интеграла будет зависеть только от координат конечной точки, т.е. являться функцией переменных x и y . Выясним связь функции $I(x, y)$ с функцией $u(x, y)$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Для этого будем вычислять интеграл

(***) по формуле (**): $I(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$, причём во втором инте-

грале x считается в процессе интегрирования постоянным. Так как $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ и

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ то } \int_{x_0}^x P(x, y)dx = \int_{x_0}^x \frac{\partial u(x, y_0)}{\partial x} dx = u(x, y_0) \Big|_{x_0}^x = u(x, y_0) - u(x_0, y_0) \quad \text{и}$$

$$\int_{y_0}^y Q(x, y)dy = \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = u(x, y) \Big|_{y_0}^y = u(x, y) - u(x, y_0). \text{ Следовательно,}$$

$$I(x, y) = u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + u(x, y) - u(x, y_0), \text{ или}$$

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

Если функцию $u(x, y)$ мы назовём *первообразной* для полного дифференциала $Pdx + Qdy$, то полученная формула является *формулой Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов*.

Пользуясь полученными результатами, мы можем указать способ отыскания функции $u(x, y)$ по её полному дифференциалу:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + u(x_0, y_0).$$

Величина $u(x_0, y_0)$ играет роль произвольной постоянной. Это и понятно, потому что сама функция $u(x, y)$ определена с точностью до постоянного слагаемого. Воспользовавшись способами вычисления криволинейного интеграла (***), указанными выше, и обозначая $u(x_0, y_0)$ через C , получим две равносильные формулы для отыскания $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \begin{cases} \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C, \\ \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C. \end{cases}$$

Если в обеих формулах положить $C=0$, то получим функцию $u(x, y)$, обращающуюся в нуль в точке (x_0, y_0) .

Начальную точку (x_0, y_0) следует выбирать так, чтобы подынтегральные функции были по возможности более простыми.

Пример. Найти первообразную функцию $u(x, y)$ для полного дифференциала $(e^y + x)dx + (xe^y - 2y)dy$.

Решение: Выбирая в качестве начальной точки начало координат, полу-

$$\text{чим } u(x, y) = \int_0^x (1+x)dx + \int_0^y (xe^y - 2y)dy + C =$$

$$= \frac{(1+x)^2}{2} \Big|_0^x + (xe^y - 2y^2) \Big|_0^y + C = \frac{(1+x)^2}{2} + xe^y - x - y^2 + C.$$

Обозначив $\frac{1}{2} + C = C$, получим окончательно: $u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xe^y - y^2 + C$.

§12. Криволинейные интегралы по пространственным линиям.

Рассмотрим криволинейные интегралы от функции трёх переменных. С физической точки зрения это будет означать, что материальная точка находится под действием сил пространственного силового поля. Такое поле определяется силой $\vec{F}(x, y, z)$ или её проекциями на оси координат, которые также будут являться функциями переменных x, y, z . Запишем это таким образом:

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Рассуждая аналогично случаю на плоскости, получим:

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \quad (*)$$

где L - пространственная линия, соединяющая начальную точку (B) и конечную (C). В дальнейшем под функциями P, Q и R мы будем понимать любые непрерывные функции трёх переменных. Интегралы $\int_L Pdx, \int_L Qdy, \int_L Rdz$ называются

соответственно *интегралами по координатам x, y и z (II рода)*.

Пусть линия L задана параметрическими уравнениями: $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, причём начальной точке линии (B) соответствует значение параметра t_B , а конечной (C) - t_C . Тогда интеграл (*) преобразуется в обыкновенный определённый интеграл по переменной t :

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{t_B}^{t_C} (P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t))dt.$$

В случае интегралов по пространственным линиям также имеет место основная теорема о независимости от пути интегрирования.

Теорема. Пусть функции $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области Ω . Тогда для того чтобы криволинейный интеграл

$$\oint_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (*)$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области Ω соблюдались равенства:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (**)$$

Под односвязной областью в пространстве мы понимаем часть пространства, ограниченную одной замкнутой поверхностью, причём такую, что любая замкнутая линия в области может быть стянута в точку, не выходя из области.

Соотношения (***) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы подынтегральное выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$. Поэтому приведённую теорему можно сформулировать так:

Для того чтобы криволинейный интеграл () не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы его подынтегральное выражение было полным дифференциалом.*

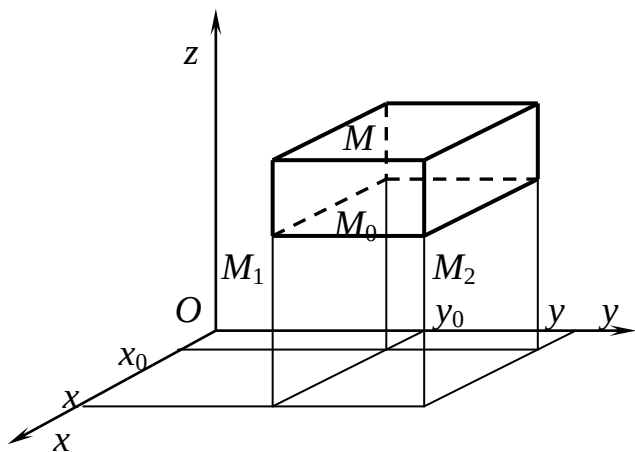
Если условия независимости интеграла (*) от линии интегрирования выполняются, то его обычно записывают в виде: $\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_1, y_1, z_1)} Pdx + Qdy + Rdz$, где (x_0, y_0, z_0)

и (x_1, y_1, z_1) - координаты начальной и конечной точек интегрирования.

Этот интеграл можно выразить через первообразную функции $u(x, y, z)$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом.

$$\text{Имеем: } \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_1, y_1, z_1)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x_1, y_1, z_1)} du(x, y, z) = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0).$$

Фактическое отыскание функции по её полному дифференциалу при помощи криволинейных интегралов производится так же, как и в плоском случае. Примем за контур интегрирования, например, ломаную $M_0M_1M_2M$. Вдоль M_0M_1 имеем: $y=y_0, z=z_0$ и $dy=0, dz=0$; вдоль M_1M_2 имеем: $z=z_0$ и $dx=0, dz=0$; наконец, вдоль M_2M имеем: $dx=0, dy=0$.



Примем за контур интегрирования, например, ломаную $M_0M_1M_2M$. Вдоль M_0M_1 имеем: $y=y_0, z=z_0$ и $dy=0, dz=0$; вдоль M_1M_2 имеем: $z=z_0$ и $dx=0, dz=0$; наконец, вдоль M_2M имеем: $dx=0, dy=0$. Значит, $u(x, y, z) - u(x_0, y_0, z_0) =$

$$= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz.$$

Мы придём к аналогичным формулам, если будем интегрировать по другим рёбрам параллелепипеда M_0M , ведущим из точки M_0 к точке M .

Таким образом, если $du = Pdx + Qdy + Rdz$, то общее выражение для первообразной можно записать, например, так:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz + C,$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - какая-нибудь точка области, C - произвольная постоянная.

§13. Криволинейный интеграл по длине (I рода).

Определение. Криволинейным интегралом по длине называется предел n -й интегральной суммы (*) при условии, что длина наибольшего участка разбиения стремится к нулю.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k = \int_L f(x, y) ds.$$

Свойства криволинейного интеграла по длине аналогичны свойствам определённого интеграла.

Вычисление криволинейных интегралов по длине производится путём преобразования их в обыкновенные определённые интегралы.

Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_L f(x, y) ds$, где линия L задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$ и $y=y(t)$, преобразовать в обыкновенный, нужно в подынтегральном выражении положить $x=x(t)$, $y=y(t)$, $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ и взять интеграл по интервалу изменения t , соответствующему линии интегрирования.

§14. Интеграл по поверхности.

Пусть в некоторой области задано поле скоростей жидкости, определяемое вектор-функцией $\vec{V} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Возьмём некоторую поверхность S . Подсчитаем поток жидкости через эту поверхность. Для этого разобьём данную поверхность произвольным образом на n частей; площади получившихся участков обозначим $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$.

Определение. Интегралом по поверхности (или поверхностным интегралом) называется предел n -й интегральной суммы при стремлении к нулю диаметра каждой площадки разбиения.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i = \iint_S f(M) d\sigma = \iint_S f(x, y, z) d\sigma. (*)$$

Свойства интегралов по поверхности: Определение интеграла по поверхности, по сути дела, аналогично определению двойного интеграла. Поэтому свойства двойных интегралов без всяких изменений переносятся на интегралы по поверхности. Однако интегралы вида: $\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$, где α ,

β , и γ - углы, образованные нормалью к поверхности S с осями координат, обладают некоторыми специфическими особенностями, связанными с самой постановкой физической задачи, и мы их рассмотрим подробнее.

Замечание. Интегралы (*), взятые по разным сторонам поверхности, отличаются друг от друга знаком.

Сокращённо обозначая подынтегральное выражение в интеграле (*) через $f(M)$, запишем последнее замечание так: $\iint_{-S} f(M) d\sigma = - \iint_{+S} f(M) d\sigma$, (**) где через $+S$

и $-S$ обозначены две стороны поверхности S .

Теорема 1. Если поверхность S разбить на части $S_1, S_2, \dots, S_n$ и направления нормалей на всех отдельных частях поверхности считать совпадающими с

направлением, выбранным на S , то интеграл по всей поверхности будет равен сумме интегралов по отдельным её частям

$$\iint_S f(M)d\sigma = \iint_{S_1} f(M)d\sigma + \dots + \iint_{S_n} f(M)d\sigma.$$

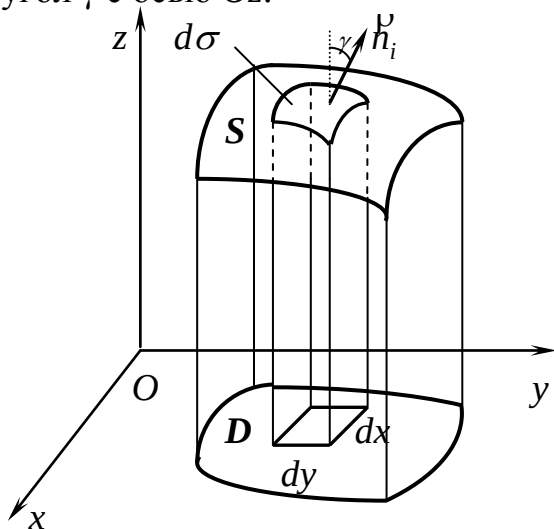
Теорема 2. Если область Ω пространства, ограниченную замкнутой поверхностью S , разбить на части при помощи замкнутых поверхностей $S_1, S_2, \dots, S_n$, то интеграл, взятый по всей поверхности S (например по положительной стороне), равен сумме интегралов, взятых по соответствующим (положительным) сторонам поверхностей $S_1, S_2, \dots, S_n$:

$$\iint_S f(M)d\sigma = \iint_{S_1} f(M)d\sigma + \iint_{S_2} f(M)d\sigma + \dots + \iint_{S_n} f(M)d\sigma.$$

Вычисление интегралов по поверхности.

Пусть дан поверхностный интеграл $\iint_S f(x, y, z)d\sigma$. Предположим, что поверхность S такова, что она с любой прямой, параллельной оси Oz , пересекается не более чем в одной точке; тогда её уравнение можно записать в виде $z=z(x, y)$.

Покажем, что в этом случае вычисление двойного интеграла по поверхности S приводится к вычислению двойного интеграла по области D - проекции поверхности S на плоскость Oxy . Возьмём элемент площади $dxdy$ области D и проектирующийся в него элемент площади $d\sigma$ так, чтобы она образовывала острый угол γ с осью Oz .



Будем считать, что в пределах площадки направление нормали n не меняется; это значит, что площадка $d\sigma$ считается куском поверхности, касательной к поверхности в точке проведения нормали. Тогда $\cos\gamma d\sigma = dxdy$. Нормаль к поверхности, заданной уравнением $z=z(x, y)$, имеет проекции $z_x, z_y, -1$. Поэтому косинус острого угла γ между нормалью и осью Oz равен $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$.

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}.$$

Значит, $d\sigma = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$ и $f(x, y, z)d\sigma = f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$.

Из последнего равенства следует, что "суммирование" выражений, стоящих слева, т.е. интегрирование по поверхности S , равносильно "суммированию" выражений справа, т.е. интегрированию по области D :

$$\iint_S f(x, y, z)d\sigma = \iint_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy. \quad (***)$$

Может случиться, что уравнение поверхности нельзя записать в виде, разрешённом относительно z , но можно записать в виде $y=y(x, z)$ или $x=x(y, z)$. Тогда од наших рассуждений будет совершенно такой же, но только нужно будет проектировать поверхность S соответственно на плоскость Oxz или Oyz . Если

обозначить через β и α острые углы, образованные нормалью к поверхности с осями Ox и Oy , то получим формулы:

$$\cos\beta d\sigma = dx dz \text{ и } \cos\alpha d\sigma = dy dz.$$

Наконец, если уравнение всей поверхности S нельзя записать в виде единой функции одного из указанных типов, то такую поверхность нужно разбить на части, для которых это сделать можно, и вычислять интеграл как сумму интегралов по отдельным частям.

Если в равенстве (***) функция $f(x, y, z)$ тождественно равна 1, то получается формула для вычисления площади поверхности (обозначим эту площадь той же буквой S , что и саму поверхность): $S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$.

В этой формуле $z=z(x, y)$ - уравнение поверхности, а D - её проекция на плоскость Oxy .

Пример. Найдём площадь части поверхности параболоида вращения $2z=x^2+y^2$, заключённой внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

Решение: Здесь $z'_x=x$ и $z'_y=y$; поэтому: $S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$,

где область D - проекция интересующей нас части поверхности на плоскость Oxy - есть полукруг радиуса R с центром в начале координат. Переходя к полярным координатам, получим: $S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1+r^2} r dr = \frac{2\pi}{3} [(1+R^2)^{\frac{3}{2}} - 1]$.

Перейдём теперь к вычислению интегралов вида

$$\iint_S [P(x, y, z) \cos\alpha + Q(x, y, z) \cos\beta + R(x, y, z) \cos\gamma] d\sigma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали, проведённой к той стороне поверхности, по которой происходит интегрирование.

Сама форма записи подынтегрального выражения подсказывает, что этот интеграл удобно вычислять как сумму трёх интегралов. Начнём с интеграла от последнего слагаемого: $\iint_S R(x, y, z) \cos\gamma d\sigma$.

Пусть поверхность S задана уравнением $z=z(x, y)$. Тогда будем различать у этой поверхности верхнюю сторону (именно к ней проведена нормаль n) и нижнюю сторону. Для верхней стороны поверхности угол γ острый и, $\cos\gamma d\sigma = dx dy$. Следовательно, $R(x, y, z) \cos\gamma d\sigma = R[x, y, z(x, y)] dx dy$, и поэтому

$$\iint_S R(x, y, z) \cos\gamma d\sigma = \iint_D R[x, y, z(x, y)] dx dy, \quad (****)$$

где D - по-прежнему проекция поверхности S на плоскость на плоскость Oxy .

Совершенно ясно, что, беря интеграл по нижней стороне поверхности, мы придём к интегралу

$$- \iint_D R[x, y, z(x, y)] dx dy.$$

Аналогично вычисляются и интегралы от остальных слагаемых. Нужно только помнить, что в формулах $\cos\alpha d\sigma = dy dz$ и $\cos\beta d\sigma = dx dz$ под α и β понимаются острые углы, образованные нормалью к поверхности соответственно с

осями Ox и Oy . Это означает, что, разрешая уравнение поверхности относительно x или y : $x=x(y, z)$ или $y=y(x, z)$ и записывая формулы, аналогичные формуле (****),

$$\iint_S Q(x, y, z) \cos \beta d\sigma = \iint_{D_1} Q[x, y(z, x), z] dx dz,$$

$$\iint_S P(x, y, z) \cos \alpha d\sigma = \iint_{D_2} P[x(y, z), y, z] dy dz,$$

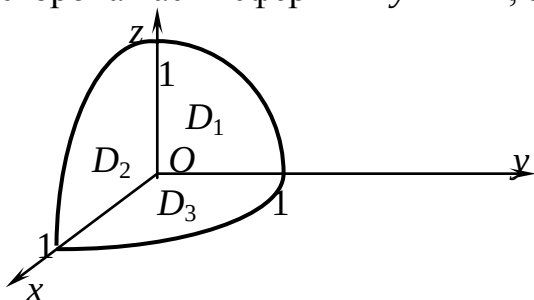
где D_1 и D_2 - проекции поверхности S соответственно на плоскости Oxz и Oyz , мы каждый раз берём интеграл по той стороне поверхности S , которая обращена в сторону положительного направления осей Oy и Ox . Если нам нужно взять интеграл по противоположной стороне поверхности, то следует просто изменить знак у двойного интеграла.

Интегралы по поверхности очень часто записываются так:

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

В такой записи сразу видно, на какую координатную плоскость производится проектирование поверхности S при интегрировании каждого слагаемого.

Пример. Вычислить интеграл $\iint_S x dy dz + dx dz + xz^2 dx dy$, где S - внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключённой в первом октанте.



Обозначим проекции поверхности интегрирования на координатные плоскости соответственно через D_1, D_2, D_3 . Это будут четверти кругов радиуса 1.

$$\text{Тогда: } I_1 = \iint_S x dy dz = \iint_{D_1} \sqrt{1 - y^2 - z^2} dy dz,$$

$$I_2 = \iint_S dx dz = \iint_{D_2} dx dz, \quad I_3 = \iint_S xz^2 dx dy = \iint_{D_3} x(1 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Второй интеграл равен просто площади области D_2 , т.е. $\frac{\pi}{4}$. Первый и третий интегралы вычислим, перейдя к полярным координатам:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6},$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r(1 - r^2) r dr = 1 \cdot \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Итак,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{2}{15} = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}.$$

§15. Формулы Стокса и Остроградского.

Для поверхностных интегралов имеет место формула, аналогичная формуле Грина, позволяющая свести вычисление интеграла по поверхности S к вычислению криволинейного интеграла по контуру L , ограничивающему эту поверхность.

Теорема. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка, то имеет место формула:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma = \int_L P dx + Q dy + R dz, (*)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности S , а L - граница поверхности.

Формула (*) называется **формулой Стокса**.

Направление интегрирования по контуру L согласовывается с выбранной стороной поверхности S при помощи следующего наглядного правила: если человек идёт по контуру L в направлении интегрирования и направление от его ног к голове совпадает с направлением нормали к выбранной стороне поверхности, то эта поверхность должна оставаться от него слева.

Замечание: Формула Стокса позволяет интеграл по поверхности заменить соответствующим криволинейным интегралом по границе поверхности и, наоборот, криволинейный интеграл по замкнутой пространственной линии заменить интегралом по поверхности, "натянутой" на контур интегрирования.

Рассмотрим теперь связь между интегралом по замкнутой поверхности и некоторыми тройным интегралом по объёму, ограниченному этой поверхностью.

Теорема. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Ω , то имеет место формула:

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] d\sigma, (*)$$

где S - граница области Ω и интегрирование по S производится по её внешней стороне.

Формула (*) называется **формулой Остроградского**.

Замечание: Формула Остроградского позволяет заменить тройной интеграл соответствующим интегралом по поверхности, ограничивающей область интегрирования, и, наоборот, интеграл по замкнутой поверхности заменить тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью.